

1

by Undikma LPPM

Submission date: 17-Jun-2021 01:36AM (UTC-0400)

Submission ID: 1570809845

File name: BUKU_PENDIDIKAN_MATEMATIKA_INTAN_DWI_HASTUTI_2018.pdf (4.32M)

Word count: 30952

Character count: 162545

Pendidikan Matematika Sekolah Dasar

Dr. Intan Dwi Hastuti, M.Pd



PENDIDIKAN MATEMATIKA SEKOLAH DASAR

PENDIDIKAN MATEMATIKA SEKOLAH DASAR

Penyusun:
Dr. Intan Dwi Hastuti, M.Pd.



Penerbit Arga Puji

PENDIDIKAN MATEMATIKA SEKOLAH DASAR

Penyusun:

Dr. Intan Dwi Hastuti, M.Pd.

Lay Out:

Bahiyah

Desain Cover:

M. Tahir

Penerbit Arga Puji Mataram Lombok

Jl. Berlian Raya Klaster Rinjani 11, Perumahan Bumi Selaparang Asri, Midang,
Gunung Sari, Lombok Barat NTB, Tlp: 081-93-1234-271.

e-mail: argapujilombok@gmail.com. web site: www.argapuji.com

Cetakan Pertama, Mei 2018

Hak Cipta dilindungi Undang-Undang

All Rights Reserved

viii + 128 hlm. 21 cm x 29.7 cm.

ISBN: 978-602-6800-80-0

KATA PENGANTAR

Buku Pendidikan Matematika Sekolah Dasar ini ditulis untuk membantu mahasiswa Pendidikan Guru Sekolah Dasar (PGSD) dalam mempersiapkan diri menjadi calon guru Sekolah Dasar (SD). Sebagai calon Guru Sekolah Dasar, mahasiswa harus memiliki kemampuan menguasai matematika di SD dan memahami konsep dasarnya sehingga dapat membantu siswa untuk mendapatkan pemahaman yang mendalam tentang matematika.

Buku ini memuat delapan bab yang terdiri dari: 1) Problem Solving, 2) Himpunan dan Bilangan Cacah, 3) Bilangan Cacah, Operasi, dan Sifat-Sifatnya, 4) *Mental math* dan algoritma untuk operasi bilangan cacah, 5) Teori Bilangan, 6) Pecahan, 7) Desimal, Rasio, Proporsi, dan Persen, dan 8) Bilangan Bulat. Setiap bab buku ini diuraikan secara detail sesuai dengan cara berpikir siswa SD dan disertai contohnya, sehingga memudahkan pembaca dalam memahami materi yang disajikan.

Ucapan terimakasih saya sampaikan kepada pimpinan prodi PGSD, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan atas dorongan dan bantuan yang diberikan dalam menyelesaikan penulisan buku ini. Segala masukan diterima dengan suka cita dan tangan terbuka. InsyaAllah buku ini akan terus penulis pikirkan untuk dapat melengkapi dan disempurnakan sehingga dapat benar-benar memudahkan para pembaca dalam menguasai matematika di SD dan memahami konsep dasarnya.

Mataram, 12 November 2017

Dr. Intan Dwi Hastuti, M.Pd.

1
DAFTAR ISI

	Halaman
KATA PENGANTAR	iv
DAFTAR ISI	v
TINJAUAN MATA KULIAH	vii
BAB I PROBLEM SOLVING	1
Pendahuluan	1
Latihan	13
Rangkuman	14
Tes Formatif	15
BAB II HIMPUNAN DAN BILANGAN CACAH	18
Pendahuluan	18
Latihan	27
Rangkuman	28
Tes Formatif	29
BAB III BILANGAN CACAH, OPERASI, DAN SIFAT-SIFANYA	32
Pendahuluan	32
Latihan	46
Rangkuman	47
Tes Formatif	49
BAB IV MENTAL MATH DAN ESTIMASI	51
Pendahuluan	51
Latihan	60
Rangkuman	60
Tes Formatif	61
BAB V TEORI BILANGAN	63
Pendahuluan	63
Latihan	77
Rangkuman	78
Tes Formatif	79

BAB VI PECAHAN	81
Pendahuluan	81
Latihan	106
Rangkuman	107
Tes Formatif	109
BAB VII DESIMAL, RASIO, PROPORSI, DAN PERSEN	111
Pendahuluan	111
Latihan	129
Rangkuman	130
Tes Formatif	132
BAB VIII BILANGAN BULAT.....	131
Pendahuluan	134
Latihan	148
Rangkuman	150
Tes Formatif	152
Daftar Pustaka	155

TINJAUAN MATA KULIAH

Mata kuliah Pendidikan Matematika Sekolah Dasar yang berbobot 3 sks merupakan mata kuliah yang akan membekali Anda dengan konsep matematika Sekolah Dasar (SD) yang terdiri dari himpunan, bilangan cacah, pecahan, desimal, rasio, proporsi, persen, dan bilangan bulat. Selain membekali dengan konsep-konsep, mata kuliah ini akan membantu Anda menguasai materi sebelum Anda melakukan proses pembelajaran matematika di kelas.

Setelah mempelajari Mata Kuliah Pendidikan Matematika SD, diharapkan mahasiswa mampu menjelaskan dan menerapkan konsep matematika dasar, seperti bilangan, geometri, pengukuran, statistika, dan peluang. Agar Anda mudah memahami mata kuliah ini, Anda dapat mempelajari Buku Pendidikan Matematika SD yang terdiri dari 8 bab dengan susunan sebagai berikut.

BAB 1 : Problem Solving

BAB 2 : Himpunan dan Bilangan Cacah

BAB 3 : Bilangan Cacah, Operasi, dan Sifat-Sifatnya

BAB 4 : *Mental math* dan algoritma untuk operasi bilangan cacah

BAB 5 : Teori Bilangan

BAB 6 : Pecahan

BAB 7 : Desimal, Rasio, Proporsi, dan Persen

BAB 8 : Bilangan Bulat

Agar tujuan pembelajaran tercapai, ikutilah petunjuk penggunaan dari buku ini. Pertama, bacalah dan pelajari buku ini dengan cermat berulang-ulang sehingga Anda benar-benar memahami dan menguasai materi. Kedua, kerjakan latihan yang tersedia secara mandiri. Ketiga, kerjakan tes formatif secara mandiri dan jika Anda mengalami kesulitan maka diskusikanlah dengan teman-teman Anda atau dosen. Selanjutnya, untuk menambah wawasan Anda, sebaiknya perlu juga mempelajari referensi yang direkomendasikan dalam daftar pustaka. Anda diharapkan juga dapat membiasakan diri untuk mempelajari setiap bab dalam buku ini secara sistematis.

BAB 1

PROBLEM SOLVING

PENDAHULUAN

Berbicara mengenai pemecahan masalah (*problem solving*), erat kaitannya dengan nama seorang tokoh dari Hungary yaitu George Polya. George Polya dikenal sebagai "*The Father of Modern Problem Solving*". Beliau lahir pada tahun 1887 dan mendapatkan gelar Ph.D di University of Budapest dan kemudian bergabung di Stanford University tahun 1942. George Polya mengenalkan empat tahap dalam pemecahan masalah yang terkenal sampai saat ini. Keempat tahap itu adalah 1) memahami masalah, 2) merencanakan, 3) melaksanakan, dan 4) melihat kembali.

Pada Bab 1 ini juga akan dibahas mengenai perbedaan antara "exercise" (latihan) dan "problem" (masalah). Seseorang dalam menyelesaikan sebuah latihan, akan menerapkan prosedur rutin untuk mendapatkan solusi atau jawaban. Sebaliknya, seseorang dalam menyelesaikan masalah terkadang harus berhenti sejenak, melakukan refleksi, dan mungkin mengambil beberapa langkah awal yang belum pernah dilakukan sebelumnya untuk sampai pada solusi. Masalah memiliki ciri-ciri, yaitu 1) mencakup tugas yang konseptual, 2) menimbulkan kebingungan bagi orang yang mengerjakan, tetapi masih bisa dijangkau untuk dikerjakan, dan 3) tidak dapat diselesaikan dengan prosedur rutin.

Selebihnya perbedaan antara latihan dan masalah tergantung juga pada keadaan pemikiran seseorang yang akan menyelesaikannya. Untuk anak kelas 1 SD, menemukan solusi dari $3 + 2$ mungkin menjadi masalah, padahal bagi kita, hal itu merupakan fakta. Untuk anak kelas 1 SD, pertanyaan "Bagaimana kamu membagi 96 pensil sama rata di antara 16 anak?" mungkin merupakan masalah bagi mereka, tetapi bagi Anda soal semacam ini merupakan latihan karena cukup menemukan $96 \div 16$. Dari kedua contoh ini menggambarkan bagaimana perbedaan antara latihan dan masalah dapat bervariasi, karena tergantung pada keadaan pemikiran seseorang yang akan menyelesaikannya.

Langkah-langkah dan strategi pemecahan masalah yang Anda pelajari di bab 1 ini akan membantu Anda menjadi "*problem solver*" yang handal dan

menjadi acuan bagi Anda untuk membantu orang lain dalam mengembangkan keterampilan pemecahan masalah. Seperti halnya George Pólya yang mengabdikan sebagian besar ilmunya untuk membantu siswa menjadi *problem solver* yang handal, salah satunya melalui proses empat langkah Pólya untuk memecahkan masalah.

Kompetensi Akhir

Kompetensi akhir dalam mempelajari buku ini adalah mahasiswa mampu memahami tahapan dan strategi pemecahan masalah.

Indikator

- a Mahasiswa dapat menjelaskan empat langkah Polya untuk menyelesaikan masalah
- b Mahasiswa dapat menyebutkan strategi-strategi pemecahan masalah
- c Mahasiswa dapat menerapkan langkah-langkah dan strategi Polya untuk menyelesaikan masalah.

TAHAPAN MENYELESAIKAN MASALAH MENURUT POLYA

STEP 1 Memahami Masalah

Kegiatan-kegiatan yang dilakukan *problem solver* pada tahap memahami masalah diantaranya: a) membaca secara berulang masalah serta memahami kata demi kata dan kalimat demi kalimat; (b) mengidentifikasi apa yang diketahui dari masalah; (c) mengidentifikasi apa yang hendak dicari; d) mengabaikan hal-hal yang tidak relevan dengan masalah memvisualisasikan situasi

STEP 2 Merencanakan

Kegiatan yang dilakukan pada tahap merencanakan adalah memilih strategi. Ada 21 strategi penyelesaian masalah menurut Musser, Burger, dan Peterson (2011) yaitu:

1. menebak dan menguji (*Guest and Test*)
2. membuat gambar, tabel, atau diagram

2 Pendidikan Matematika Sekolah Dasar

3. menggunakan variabel
4. mencari pola
5. membuat daftar
6. memecahkan masalah yang lebih sederhana
7. menggambar diagram
8. menggunakan penalaran langsung
9. menggunakan penalaran tidak langsung
10. menggunakan sifat-sifat bilangan
11. memecahkan masalah setara
12. bekerja mundur (*work backward*)
13. menggunakan kasus
14. memecahkan persamaan,
15. mencari formula
16. melakukan simulasi
17. menggunakan model
18. menggunakan analisis dimensional
19. mengidentifikasi sub tujuan
20. menggunakan koordinat
21. menggunakan simetri.

STEP 3 Melaksanakan Rencana

Kegiatan-kegiatan yang dilakukan oleh *problem solver* pada tahap melaksanakan rencana adalah mengimplementasikan strategi dan memeriksa setiap langkah dari perencanaan yang telah diproses. Dalam mengimplementasikan strategi, problem solver juga melibatkan: 1) keterampilan berhitung (*use computational skills*), 2) menggunakan keterampilan aljabar (*use algebraic skills*), dan 3) menggunakan keterampilan geometri (*use geometric skills*).

STEP 4 Melihat Kembali

Kegiatan-kegiatan yang dilakukan *problem solver* pada tahap memeriksa kembali yaitu: 1) mengecek hasilnya, 2) menginterpretasikan jawaban yang

diperoleh, 3) apakah jawaban masuk akal, 3) apakah telah menjawab semua pertanyaan, 4) apakah ada cara lain untuk mendapatkan solusi yang sama dengan cara yang lebih mudah.

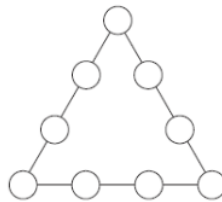
STRATEGI-STRATEGI PEMECAHAN MASALAH

Kegiatan yang dilakukan *problem solver* saat merencanakan dan melaksanakan rencana adalah memilih dan menerapkan strategi. Ada 21 strategi penyelesaian masalah menurut Musser, Burger, dan Peterson (2011), yaitu: 1) menebak dan uji, 2) membuat gambar, 3) menggunakan variabel, 4) mencari pola, 5) membuat daftar, 6) memecahkan masalah yang lebih sederhana, 7) menggambar diagram, 8) menggunakan penalaran langsung, 9) menggunakan penalaran tidak langsung, 10) menggunakan sifat-sifat bilangan, 11) memecahkan masalah setara, 12) bekerja mundur (*work backward*), 13) menggunakan kasus, 14) memecahkan persamaan, 15) mencari formula, 16) melakukan simulasi, 17) menggunakan model, 18) menggunakan analisis dimensional, 19) mengidentifikasi sub tujuan, 20) menggunakan koordinat, 21) menggunakan simetri. Masing-masing penerapan strategi akan dibahas pada bagian ini beserta contoh masalahnya.

Strategi 1 Menebak dan Menguji

Masalah 1

Susunlah bilangan cacah 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dan 9 pada sisi suatu segitiga pada gambar 1.1, sehingga jumlah bilangan pada setiap sisinya adalah 23



Gambar 1.1

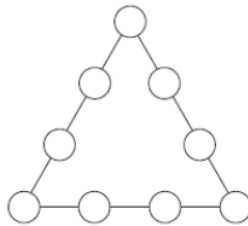
STEP 1 Memahami Masalah

Setiap bilangan harus digunakan tepat satu kali ketika menyusun bilangan-bilangan dalam segitiga. Jumlah keempat bilangan pada setiap sisi segitiga adalah 23.

STRATEGY SYSTEMATIC GUESS AND TEST

STEP 2 Merencanakan

Misal kita mulai dengan menempatkan bilangan-bilangan terkecil 1,2,3 di sudut-sudut segitiga. Jika kita menempatkan bilangan 1,2,3 di sudut-sudut segitiga, maka kita akan butuh dua pasang bilangan dari 6 bilangan yang tersedia yaitu 4,5,6,7,8, dan 9 untuk ditempatkan pada masing-masing sisi segitiga.



Gambar 1.2

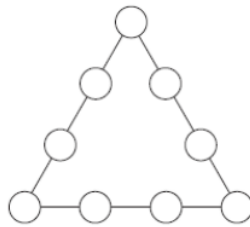
STEP 3 Melaksanakan Rencana

Di sisi kiri segitiga sudah ada bilangan 1 dan 2 (lihat gambar 1.2), sehingga kita butuh dua pasang bilangan dari 6 bilangan yang tersedia yaitu 4,5,6,7,8, dan 9 untuk ditempatkan di sisi kiri segitiga. Misal dua bilangan yang akan kita tempatkan di antara bilangan 1 dan 2 adalah x dan y sehingga memenuhi $1 + x + y + 2 = 23$. Untuk memenuhi kalimat matematika $1 + x + y + 2 = 23$, x dan y merupakan dua buah bilangan yang jika dijumlahkan hasilnya haruslah 20. Sekarang coba amati apakah ada sebarang dua bilangan yang akan kita pilih dari keenam bilangan yang tersisa yaitu 4,5,6,7,8,9, jika dijumlahkan maka hasilnya adalah 20. (Anda boleh, mencoba dua bilangan dari bilangan-bilangan yang tersisa lalu mengujinya kembali). Kesimpulannya adalah dengan menempatkan bilangan 1,2,3 di sudut-sudut segitiga, maka kita tidak akan menemukan keempat bilangan pada masing-masing sisi segitiga yang jika dijumlahkan hasilnya adalah 23.

Menempatkan bilangan-bilangan 1, 2, 3 di sudut segitiga mengakibatkan jumlah keempat bilangan pada sisi-sisi segitiga terlalu kecil. Sama halnya dengan menempatkan bilangan 1, 2, 4; 1, 2, 5, dan 1, 2, 6 pada sudut segitiga juga mengakibatkan jumlah keempat bilangan pada sisi-sisi segitiga terlalu kecil.

STEP 3 Merencanakan

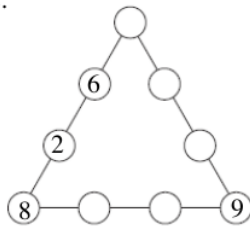
Sekarang coba tempatkan bilangan 7,8,9 di sudut-sudut segitiga. Jika kita menempatkan bilangan 7,8,9 di sudut-sudut segitiga, maka kita akan butuh dua pasang bilangan dari 6 bilangan yang tersedia yaitu 1,2,3,4,5,6 untuk ditempatkan pada masing-masing sisi segitiga.



Gambar 1.3

STEP 3 Melaksanakan

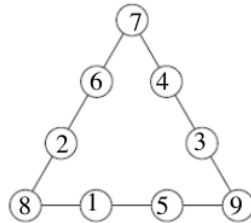
Di sisi kiri segitiga sudah ada bilangan 7 dan 8 (lihat Gambar 1.3), sehingga kita butuh dua pasang bilangan dari 6 bilangan yang tersedia yaitu 1,2,3,4,5, dan 6 untuk ditempatkan di sisi kiri segitiga. Misal dua bilangan yang akan kita tempatkan di antara bilangan 7 dan 8 adalah x dan y sehingga memenuhi $7 + x + y + 8 = 23$. Dengan demikian kemungkinan x dan y dapat disubstitusi dengan bilangan 5 dan 3 atau 6 dan 2.



Gambar 1.4

Pendidikan Matematika Sekolah Dasar

Langkah selanjutnya untuk mendapatkan solusi dari masalah ini adalah dengan menempatkan bilangan 1 dan 5 diantara bilangan 8 dan 9 serta menempatkan bilangan 4 dan 3 diantara bilangan 7 dan 9



Gambar 1.4

STEP 4 Melihat Kembali

Pada tahap melihat kembali, kita dapat mengecek hasil bahwa jumlah keempat bilangan pada setiap sisi segitiga adalah 23 dan memastikan bahwa bilangan 1,2,3,4,5,6,7,8,9 digunakan tepat satu kali.

Strategi 2 Membuat Gambar atau Diagram

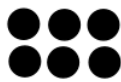
Gambar mempunyai banyak keuntungan yaitu sebagai model dalam memvisualisasikan masalah dan mengklarifikasi pemikiran. Tujuan dari pembuatan gambar adalah untuk mengilustrasikan situasi dari masalah.

Masalah 2

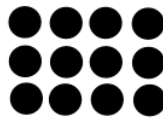
Temukan banyak bulatan pada gambar ke -n



Gambar 1



Gambar 2



Gambar 3

STEP 1 Memahami Masalah

Siswa diminta untuk menghitung banyak bulatan pada gambar ke-n. Masalah ini merupakan masalah yang terkait dengan pola

STEP 2 Merencanakan

Sebagai langkah awal untuk memperjelas, kita perlu membuat tabel untuk menunjukkan banyak bulatan yang dihasilkan dengan gambar ke-1, ke-2, ke 3, dst. Dengan membuat tabel, akan mempermudah kita dalam membuat aturan atau pola untuk menyatakan hubungan banyak bulatan yang dihasilkan dengan gambar ke-1, ke-2, ke 3, dst.

STEP 3 Melaksanakan

Mulai dengan membuat tabel yang menyatakan hubungan antara banyak bulatan yang dihasilkan dengan gambar ke-1, ke-2, ke 3, dst. Untuk gambar pertama, banyak bulatannya adalah 2; untuk gambar kedua, banyak bulatannya adalah 6; untuk gambar ketiga, banyak bulatannya adalah 12. Sekarang tugas kita adalah menentukan pola umum untuk menyatakan hubungan banyak bulatan yang dihasilkan dengan gambar ke-1, ke-2, ke 3, dst

Gambar ke	Banyak bulatan	
1	2	$1 \times 2 = 1 \times (1 + 1)$
2	6	$2 \times 3 = 2 \times (2 + 1)$
3	12	$3 \times 4 = 3 \times (3 + 1)$
4	20	$4 \times 5 = 4 \times (4 + 1)$
.		.
.		.
N		$n \times (n + 1)$

Berdasarkan tabel di atas kita dapat banyak bulatan untuk gambar ke-n adalah $n \times (n + 1)$

STEP 4 Melihat kembali

Pada tahap melihat kembali, Anda dapat mengecek hasil antara penggunaan rumus $n \times (n + 1)$ untuk $n = 5$ dan $n = 6$ dengan menghitung manual berdasarkan gambar. Tujuan pengecekan antara rumus umum dengan penghitungan manual berdasarkan gambar adalah untuk memastikan rumus umum yang kita tulis sudah tepat atau belum.

Strategi 3 Menggunakan variabel**Masalah 3**

Pada Suatu Fakultas, $\frac{4}{7}$ dari mahasiswa adalah wanita, $\frac{4}{5}$ dari mahasiswa laki-laki sudah menikah, dan 9 mahasiswa laki-laki belum menikah. Berapakah jumlah mahasiswa di Fakultas tersebut.

STEP 1 Memahami masalah

Mahasiswa di suatu fakultas terdiri dari laki-laki dan wanita. Dari keseluruhan mahasiswa laki-laki yang ada di fakultas tersebut ada yang sudah menikah dan ada yang belum menikah. Demikian juga dari keseluruhan mahasiswa wanita yang ada di fakultas tersebut ada yang sudah menikah dan ada yang belum menikah. Tugas Anda adalah menentukan jumlah mahasiswa yang ada di Fakultas tersebut

STEP 2 Merencanakan

Anda perlu membuat pemisalan, misalkan jumlah mahasiswa laki-laki adalah x dan jumlah keseluruhan mahasiswa adalah y . Kata kunci dari masalah tersebut adalah $\frac{4}{5}$ dari mahasiswa laki-laki sudah menikah, dan 9 mahasiswa laki-laki belum menikah. Jadi dari kata kunci ini kita dapat menghitung jumlah mahasiswa laki-laki terlebih dahulu.

STEP 3 Melaksanakan

Mulai dengan mencari jumlah mahasiswa laki-laki dengan membuat pemisalan yang sudah dibuat. Misal, jumlah mahasiswa laki-laki adalah x . Pada soal diketahui bahwa $\frac{4}{5}$ dari mahasiswa laki-laki sudah menikah, jadi $\frac{1}{5}$ dari mahasiswa laki-laki belum menikah. Pada soal juga disebutkan bahwa jumlah mahasiswa laki-laki yang belum menikah ada 9, sehingga dapat ditulis kalimat matematikanya menjadi

$$\frac{1}{5}x = 9$$

$$x = 45$$

Jadi jumlah mahasiswa laki-laki yang ada di fakultas tersebut adalah 45 orang. Kita lihat lagi bahwa dalam masalah tersebut kita diminta untuk mencari jumlah mahasiswa laki-laki dan wanita, dan diketahui bahwa $\frac{4}{7}$ dari mahasiswa

Pendidikan Matematika Sekolah Dasar

adalah wanita. Ini artinya bahwa $\frac{3}{7}$ dari keseluruhan mahasiswa adalah laki-laki, dan telah kita ketahui bahwa jumlah mahasiswa laki-laki yang ada di fakultas adalah 45 orang. Jadi dari sini dapat kita tulis kalimat matematikanya dengan memisalkan jumlah keseluruhan mahasiswa laki-laki dan wanita yang ada di fakultas adalah p

$$\frac{3}{7}p = 45$$

$$p = 105$$

Jadi jumlah keseluruhan mahasiswa yang ada di di Fakultas tersebut adalah 105 orang.

STEP 4 Melihat Kembali

Tadi di langkah awal kita sudah mendapatkan hasil bahwa jumlah mahasiswa laki-laki adalah 45 orang dan sekarang kita mau mengecek hasilnya kembali lewat perbandingan antara mahasiswa laki-laki dan wanita. Apakah sama hasilnya yaitu banyak mahasiswa laki-laki adalah 45 orang?

$\frac{4}{7}$ dari mahasiswa adalah wanita, ini artinya bahwa $\frac{3}{7}$ dari keseluruhan mahasiswa adalah laki-laki dan sudah kita dapatkan bahwa jumlah keseluruhan mahasiswa yang ada di di Fakultas tersebut adalah 105 orang. Jadi kalimat matematikanya

$$\frac{3}{7} \times 105 = 45$$

Dan setelah dicek lewat perbandingan antara jumlah mahasiswa laki-laki dan wanita, ternyata hasilnya sama yaitu jumlah mahasiswa laki-laki adalah 45 orang. Jadi solusi untuk masalah 3 adalah jumlah mahasiswa yang ada di Fakultas tersebut sebanyak 105 orang.

Strategi 4 Mencari Pola

Saat menggunakan strategi mencari pola, seseorang biasanya mendaftar beberapa masalah spesifik dan kemudian melihat apakah pola yang muncul dapat digeneralisasi secara umum.

Masalah 4

Temukan digit satuan dari 2^{2017}

STEP 1 Memahami Masalah

Untuk masalah ini kita hanya diminta menentukan digit satuan dari 2^{2017} .

STEP 2 Merencanakan

Mulai analisis dengan pangkat yang sederhana seperti $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$. Digit satuan dari bilangan-bilangan berpangkat ini membentuk pola yang dapat digunakan untuk memprediksi digit satuan dari 2^{2017} .

STEP 3 Melaksanakan

$$2^1 = 2$$

$$2^2 = 4$$

$$2^3 = 8$$

$$2^4 = 16$$

$$2^5 = 32$$

$$2^6 = 64$$

Dari sini kita melihat bahwa setelah pangkat 4 ternyata bilangannya berulang lagi, artinya setiap kelipatan 4 maka digit satuannya berulang lagi. Untuk mencari digit satuan pada bilangan 2^{2017} maka kita bagi terlebih dahulu 2017 dengan 4 sehingga dihitung seperti ini $2017 \div 4 = 504$ sisa 1 (perhatikan angka sisanya). Perhatikan bahwa sisanya 1 maka akan kembali ke urutan pertama sehingga digit satuan untuk 2^{2017} adalah 2.

STEP 4 Melihat kembali

Beberapa digit dari bilangan lain yang melibatkan eksponen dapat ditemukan dengan cara yang sama. Periksa hal ini untuk beberapa bilangan dari 4 sampai 9.

Strategi 5 Membuat Daftar

Masalah 5

Berapa banyak segitiga sama sisi dari semua ukuran yang ada pada segitiga sama sisi berukuran $3 \times 3 \times 3$ seperti pada gambar di bawah ini?



STEP 1 Memahami Masalah

Segitiga di atas merupakan segitiga sama sisi berukuran $3 \times 3 \times 3$, dan dalam masalah tersebut diminta untuk mencari banyak segitiga sama sisi dari semua ukuran baik segitiga sama sisi berukuran $1 \times 1 \times 1$, segitiga sama sisi berukuran $2 \times 2 \times 2$, maupun segitiga sama sisi yang berukuran $3 \times 3 \times 3$?

STEP 2 Merencanakan

Untuk mempermudah, coba buat daftar tentang banyaknya segitiga sama sisi yang berukuran $1 \times 1 \times 1$, segitiga sama sisi yang berukuran $2 \times 2 \times 2$, segitiga sama sisi yang berukuran $3 \times 3 \times 3$ dalam daftar menurun.

STEP 3 Melaksanakan

Banyak segitiga sama sisi berukuran $1 \times 1 \times 1 = 9$

Banyak segitiga sama sisi berukuran $2 \times 2 \times 2 = 3$

Banyak segitiga sama sisi berukuran $3 \times 3 \times 3 = 1$

Jadi banyak segitiga sama sisi dari semua ukuran ada 13

STEP 4 Melihat Kembali

Dapatkah Anda menemukan cara lain yang lebih mudah dalam menghitung banyak segitiga sama sisi dari semua ukuran?

Strategi 6 Memecahkan Masalah yang Lebih Sederhana

Strategi mengatasi masalah yang lebih sederhana sering digunakan bersamaan dengan strategi mencari pola. Strategi mengatasi masalah yang lebih sederhana melibatkan penyederhanaan masalah yang ada dan membuatnya lebih mudah untuk diselesaikan.

Masalah 6

Tentukan jumlah dari $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{21 \times 23}$

STEP 1 Memahami Masalah

Masalah ini berkaitan dengan pola, dan kita diminta untuk menentukan hasil penjumlahan dari $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{21 \times 23}$. Jika diperhatikan, penyebutnya selalu punya pola yaitu perkalian dari dua bilangan ganjil dan pembilangnya selalu 1. Pola untuk penyebutnya adalah $1 \times 3, 3 \times 5, 5 \times 7, \dots \times 21 \times 23$.

STEP 2 Merencanakan

Untuk mempermudah menyelesaikannya, bentuk pecahan $\frac{1}{1 \times 3}$ dapat disederhanakan menjadi $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right)$, pecahan $\frac{1}{3 \times 5}$ dapat disederhanakan menjadi $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right)$, pecahan $\frac{1}{5 \times 7}$ dapat disederhanakan menjadi $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right)$, dan seterusnya

STEP 3 Melaksanakan

Masalah 6 dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \cdots + \frac{1}{21 \times 23} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{21} - \frac{1}{23} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{23} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{22}{23} \right) \\ &= \frac{11}{23} \end{aligned}$$

STEP 4 Melihat Kembali

Metode untuk menyelesaikan masalah ini dengan menggunakan strategi memecahkan masalah yang lebih sederhana. Sebagai contoh Anda dapat menjumlahkan $\frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{4 \times 6} + \frac{1}{6 \times 8} + \cdots + \frac{1}{22 \times 24}$. Dimana jika kita perhatikan, penyebutnya selalu punya pola yaitu perkalian dari dua bilangan genap dan pembilangnya selalu 1

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi problem solving, kerjakanlah latihan berikut.

1. Sebutkan empat langkah dalam menyelesaikan masalah menurut Polya.
2. Kegiatan yang dilakukan pada tahap merencanakan adalah memilih strategi. Sebutkan macam-macam strategi dalam menyelesaikan masalah.
3. Jika diagonal suatu persegi digambar, ada berapa banyak segitiga dari semua ukuran yang dapat terbentuk?
4. Anton dan Vina diminta untuk menjumlahkan dua bilangan cacah. Anton mengurangkan dua bilangan tersebut dan menghasilkan 10. Berapa hasil penjumlahan dari dua bilangan cacah tersebut?

5. Sisipkan simbol $+$, $-$, $\times$, dan $\div$, pada titik-titik di bawah ini, sehingga menghasilkan persamaan yang benar (Simbol mungkin dapat digunakan lebih dari sekali).

$$6 ___ 6 ___ 6 ___ 6 = 13$$

6. Temukan bilangan yang hilang pada pola berikut.

a $256, 128, 64, ___, 16, 8$

b $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, ___, \frac{1}{81}$

c $127, 863, 12.789, ___, 135, 18$

RANGKUMAN

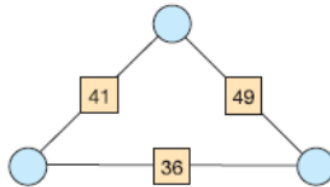
Pemecahan masalah merupakan bagian tak terpisahkan dalam pembelajaran matematika dan merupakan komponen penting dalam pembelajaran konstruktivis. Pemberian soal non rutin atau masalah akan dapat meningkatkan proses penalaran. Seseorang dalam menyelesaikan masalah terkadang harus berhenti sejenak, melakukan refleksi, dan mungkin mengambil beberapa langkah awal yang belum pernah dilakukan sebelumnya untuk sampai pada solusi. Suatu soal dapat dikatakan masalah jika memiliki ciri-ciri, yaitu 1) mencakup tugas yang konseptual, 2) menimbulkan kebingungan bagi orang yang mengerjakan, tetapi masih bisa dijangkau untuk dikerjakan, dan 3) tidak dapat diselesaikan dengan prosedur rutin.

Menurut Polya, ada empat tahapan dalam menyelesaikan masalah. Keempat tahapan itu adalah 1) memahami masalah, 2) merencanakan, 3) melaksanakan, dan 4) melihat kembali. Kegiatan yang dilakukan pada tahap merencanakan adalah memilih strategi. Ada 21 strategi dalam penyelesaian masalah, yaitu: 1) menebak dan menguji (*Guest and Test*), 2) membuat gambar, tabel, atau diagram, 3) menggunakan variabel, 4) mencari pola, 5) membuat daftar, 6) memecahkan masalah yang lebih sederhana, 7) menggambar diagram, 8) menggunakan penalaran langsung, 9) menggunakan penalaran tidak langsung, 10) menggunakan sifat-sifat bilangan, 11) memecahkan masalah setara, 12) bekerja mundur (*work backward*), 13) menggunakan kasus, 14) memecahkan persamaan, 15) mencari formula, 16) melakukan simulasi, 17) menggunakan model, 18)

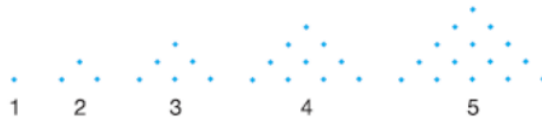
menggunakan analisis dimensional, 19) mengidentifikasi sub tujuan, 20) menggunakan koordinat, dan 21) menggunakan simetri.

TES FORMATIF

- Perhatikan gambar di bawah ini. Angka yang muncul dalam kotak merupakan penjumlahan dua angka dalam lingkaran yang terletak pada setiap sisinya. Tentukan angka-angka yang ada di lingkaran tersebut.



- Bilangan segitiga (*triangular number*) adalah bilangan cacah yang dipresentasikan oleh deretan titik-titik yang membentuk segitiga seperti pada gambar di bawah ini.



Lengkapi tabel berikut dan deskripsikan pola pada kolom “banyaknya titik”

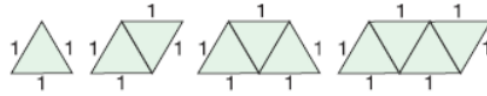
Bilangan	Banyaknya Titik (Bilangan Segitiga)
1	1
2	3
3	
4	
5	
6	

- Berapa banyak titik pada pola ke sepuluh?
- Apakah ada bilangan segitiga yang mempunyai 91 titik? Jika ada, sebutkan pada pola ke berapa
- Apakah ada bilangan segitiga yang mempunyai 150 titik? Jika ada, sebutkan pada pola ke berapa

Pendidikan Matematika Sekolah Dasar

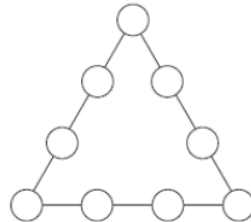
d Tuliskan rumus umum untuk menentukan banyaknya titik pada bilangan segitiga ke- n .

3. Temukan keliling bangun pada gambar di bawah ini, kemudian lengkapi tabelnya



Banyaknya segitiga									n
Keliling									

4. Susunlah bilangan cacah 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, dan 10 pada sisi suatu segitiga, sehingga jumlah bilangan pada setiap sisinya adalah 21 !



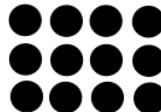
5. Tentukan banyak bulatan pada gambar ke- n !



Gambar 1



Gambar 2



Gambar 3

6. Jika diagonal persegi digambar, berapa banyak segitiga dari semua ukuran yang dapat terbentuk?

7. Akya dan Gio diminta menambahkan dua bilangan cacah. Akya mengurangi dua bilangan tersebut dan menghasilkan 10 kemudian Gio mengalikannya dan menghasilkan 651. Berapa hasil penjumlahannya?

8. Berapa banyak segitiga dalam gambar berikut?



9. Coba pikirkan suatu bilangan. Tambahkan dengan 10. Kalikan dengan 4. Tambahkan 200. Bagi dengan 4. Kurangi dengan bilangan yang telah kamu pikirkan tadi dan pasti hasilnya adalah 60. Mengapa? Jelaskan alasannya mengapa hal ini berlaku untuk sebarang bilangan.
10. Lima orang anak duduk pada suatu sisi meja. Gina duduk di sebelah Beni. Mitha duduk di sebelah Tomi. Heni duduk di kursi ketiga dari Beni. Gina duduk di kursi ketiga dari Mitha. Selain Mitha, siapa lagi yang duduk di sebelah Tomi?

BAB 2

HIMPUNAN

PENDAHULUAN

Georg Cantor (1845-1918) adalah seorang matematikawan Jerman yang merupakan penemu teori himpunan dan himpunan tak hingga yang merupakan sebuah topik yang sangat kontroversial pada saat itu. Beliau juga seorang doktor, guru besar, dan pengarang. Pada tahun 1873, Beliau mengajarkan teori himpunan, dan Beliau meninggal di Hella, Jerman pada tanggal 6 Januari 1918 pada umur 73 tahun. Beliau ini dianggap sebagai Bapak teori himpunan, karena Beliau adalah yang pertama kali memperkenalkan teori himpunan ini, walaupun pada waktu itu teori beliau sangat kontroversial tetapi saat ini teori Georg Cantor sangat luas kegunaannya.

Konsep himpunan sering kita gunakan dalam kehidupan sehari-hari, sehingga dengan mempelajari materi himpunan bukanlah menjadi pekerjaan yang sia-sia. Misalkan wujud himpunan dalam kehidupan sehari-hari adalah ketika kita mendaftar nama-nama provinsi di Jawa seperti, Jawa Barat, DKI Jakarta, Banten, Jawa Tengah, DI Yogyakarta, dan Jawa Timur. Misalnya juga himpunan nama-nama pantai di Lombok dan lain sebagainya. Selain itu himpunan menjadi landasan dan dasar materi bilangan cacah dan operasinya. Seperti yang kita tahu bahwa bilangan cacah juga sangat erat kaitannya dalam kehidupan sehari-hari kita.

Himpunan dapat dinyatakan dalam tiga cara yaitu 1) deskripsi verbal, 2) mendaftar anggota-anggotanya dan dipisahkan dengan tanda koma, dan 3) notasi pembentuk himpunan. Sebagai contoh deskripsi verbal “himpunan dari semua nama-nama provinsi di Jawa”. Mendaftar anggota-anggotanya seperti {Jawa Barat, DKI Jakarta, Banten, Jawa Tengah, DI Yogyakarta, Jawa Timur}. Notasi pembentuk himpunan: $\{x | x \text{ adalah nama – nama provinsi di Jawa}\}$
Dibaca, himpunan dari semua x sedemikian sehingga x adalah nama-nama provinsi di Jawa.

Himpunan biasanya dinotasikan dengan huruf kapital A, B, C , dan sebagainya. Simbol $\in$ digunakan untuk mengindikasikan bahwa suatu objek

adalah anggota dari suatu himpunan dan simbol $\notin$ digunakan untuk mengindikasikan bahwa suatu objek bukan anggota dari suatu himpunan. Misalnya A adalah himpunan dari nama-nama provinsi yang ada di Jawa, maka Jawa Timur $\in S$ dan Sumatera Barat $\notin S$. Himpunan tanpa anggota disebut himpunan kosong dan dinotasikan dengan $\{ \}$ atau simbol $\emptyset$.

Dua himpunan A dan B adalah sama, ditulis $A = B$, jika dan hanya jika keduanya mempunyai elemen atau anggota yang sama. Perlu diperhatikan ada aturan terkait tentang himpunan. Pertama, unsur yang sama tidak terdaftar lebih dari satu kali dalam satu set. Kedua, urutan elemen dalam satu himpunan tidak penting. Oleh karena itu, berdasarkan aturan pertama, himpunan $\{p, p, q\}$ ditulis menjadi $\{p, q\}$ dan berdasarkan aturan kedua $\{p, q\} = \{q, p\}$, $\{p, q, r\} = \{r, q, p\}$, dan sebagainya. Konsep korespondensi satu-satu diperlukan untuk memformalkan makna keseluruhan bilangan.

Setelah mempelajari buku ini, secara umum Anda diharapkan mampu untuk memahami himpunan serta operasi-operasinya. Adapun kompetensi dasar dan indikator yang diharapkan setelah Anda mempelajari buku ini adalah sebagai berikut.

Kompetensi Dasar:

Kompetensi dasar dalam mempelajari materi himpunan adalah mahasiswa mampu menerapkan konsep himpunan dalam menyelesaikan masalah.

Indikator

- a Mahasiswa dapat menyebutkan contoh-contoh himpunan
- b Mahasiswa dapat menyebutkan jenis-jenis operasi pada himpunan
- c Mahasiswa dapat menerapkan konsep himpunan dalam penyelesaian masalah

Seseorang mungkin membandingkan dua himpunan untuk melihat apakah kedua himpunan tersebut identik ataukah kedua himpunan tersebut secara tepat jumlah elemen atau anggota yang sama. Dua himpunan dikatakan sama, jika dan hanya jika kedua himpunan tersebut memuat secara tepat anggota yang sama, misal jika $A = \{2, 3\}$ dan $B = \{3, 2\}$ maka $A = B$

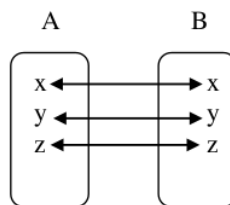
Untuk memebndingkan dua himpunan, seseorang dapat menempatkan elemen-elemennya ke dalam korespondensi satu-satu. Berikut akan dijelaskan definisi dari korespondensi satu-satu.

Definisi

Korespondensi Satu-Satu

Korespondensi satu-satu antara dua himpunan A dan B adalah suatu pasangan dari unsur-unsur di A dengan unsur-unsur di B sehingga setiap unsur di A bersesuaian tepat satu unsur di B, dan sebaliknya. Jika ada suatu korespondensi satu-satu antara himpunan A dan B, kita tulis $A \sim B$ serta kita dapat mengatakan bahwa A dan B ekuivalen.

Korespondensi satu-satu antara himpunan A dan B, ditunjukkan pada Gambar 2.1



Gambar 2.1

Perlu diperhatikan, himpunan yang sama selalu ekuivalen, karena setiap anggotanya dipasangkan dengan dirinya sendiri, akan tetapi himpunan yang ekuivalen belum tentu sama. Sebagai contoh, $A = \{1, 2\} \sim \{a, b\}$ tetapi $\{1, 2\} \neq \{a, b\}$. Dua himpunan $A = \{a, b\}$ dan $B = \{a, b, c\}$ tidak ekuivalen.

Subset dari Suatu Himpunan: $A \subseteq B$

Himpunan A dikatakan subset dari B, ditulis $A \subseteq B$, jika dan hanya jika setiap unsur di A juga unsur di B

Contoh 2.1:

Himpunan bilangan asli adalah subset dari himpunan bilangan bulat.

$$\{p, q, r, s\} \subseteq \{p, q, r, s, t, u\}.$$

$$\{2, 4, 6, 8, 10\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$\{1, 3, 5, 7, 9\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$\emptyset \subseteq A$$

Himpunan bagian atau subset disimbolkan dengan $\subseteq$, sedangkan simbol untuk bukan subset adalah $\not\subseteq$.

Contoh 2.2:

$\{p, q, r\} \not\subseteq \{p, q, s\}$, karena ada r yang merupakan unsur pada himpunan $\{p, q, r\}$ tetapi r bukan merupakan unsur pada himpunan $\{p, q, s\}$

$$\{0, 1, 2, 3\} \not\subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\{-1, 0, 1, 2, 3\} \not\subseteq \{0, 1, 2, 3\}$$

Jika $A \subseteq B$ dan B mempunyai suatu unsur yang tidak ada di A , maka dapat kita tulis $A \subset B$ (dibaca A adalah proper subset dari B). Sebagai contoh, $\{a, b, d\} \subset \{a, b, c, d\}$, karena $\{a, b, d\} \subseteq \{a, b, c, d\}$ dan c merupakan unsur dari himpunan $\{a, b, c, d\}$ tetapi c bukan merupakan unsur pada himpunan $\{a, b, d\}$

HIMPUNAN HINGGA DAN TAK HINGGA

4
Suatu himpunan dikatakan hingga jika himpunan tersebut adalah himpunan kosong atau mempunyai unsur-unsur atau anggota yang terdaftar. Himpunan tak hingga adalah himpunan yang anggota-anggotanya terdaftar tanpa akhir. Secara formal, himpunan dikatakan hingga jika (1) himpunan tersebut adalah himpunan kosong dan (2) himpunan tersebut masuk dalam definisi korespondensi satu-satu yang format himpunannya adalah $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ dengan kata lain kita dapat membilanganya.

Contoh 2.3:

Tentukan apakah himpunan-himpunan berikut adalah hingga atau tak hingga

a $\{p, q, r\}$

b $\{1, 2, 3, \dots\}$

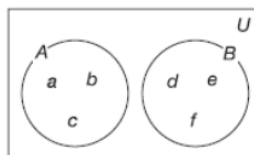
c $\{1, 3, 5, \dots, 19\}$

Solusi

- a $\{p, q, r\}$ adalah hingga karena $\{p, q, r\}$ dapat dipasangkan dengan $\{1,2,3\}$
- b $\{1,2,3, \dots\}$ adalah himpunan tak hingga
- c $\{2,4,6, \dots, 20\}$ adalah himpunan hingga karena himpunan ini dapat dipasangkan dengan $\{1,2,3, \dots, 10\}$

OPERASI PADA HIMPUNAN

Dua himpunan A dan B yang tidak mempunyai unsur –unsur yang sama ⁵ disebut himpunan saling lepas (*disjoint*). Himpunan $\{a, b, c\}$ dan $\{d, e, f\}$ adalah *disjoint* (lihat Gambar 2.1), sedangkan $\{a, b\}$ dan $\{b, c\}$ bukan disjoint, karena b merupakan unsur yang ada di kedua himpunan.



Gambar 2.1

Ada banyak cara untuk mengonstruksi suatu himpunan baru dari dua atau lebih himpunan. Operasi pada himpunan berikut akan sangat berguna untuk mengklarifikasi pemahaman kita tentang bilangan cacah dan operasinya.

DEFINISI

Gabungan dari himpunan: $A \cup B$

Gabungan dari dua himpunan A dan B ditulis $A \cup B$ adalah himpunan yang terdiri dari semua unsur yang ada di A atau B (atau keduanya).

Secara informal $A \cup B$ terbentuk dengan menempatkan semua unsur dari A dan B secara bersama-sama. Untuk memahami lebih lanjut perhatikan contoh berikut.

CONTOH 2.4

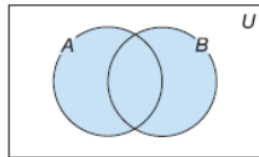
Tentukan gabungan dari pasangan himpunan berikut

- a $\{u, v, w\} \cup \{x, y, z\}$
b $\{1, 3, 5, 7, 9\} \cup \emptyset$
c $\{p, q, s\} \cup \{p, q, r\}$

SOLUSI

- a $\{u, v, w\} \cup \{x, y, z\} = \{u, v, w, x, y, z\}$
b $\{1, 3, 5, 7, 9\} \cup \emptyset = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
c $\{p, q, s\} \cup \{p, q, r\} = \{p, q, r, s\}$

Perhatikan, meskipun p dan q adalah anggota dari kedua himpunan pada contoh 2.4 (c), p dan q tetap terdaftar hanya sekali dalam operasi gabungan dua himpunan. Gabungan dari himpunan A dan B ditunjukkan dengan daerah yang diarsir dalam diagram Venn pada Gambar 2.2 berikut.



Gambar 2.2

Notasi gabungan himpunan adalah dasar untuk penjumlahan bilangan cacah, tetapi hanya terjadi pada himpunan *disjoint*. Perhatikan himpunan pada contoh 2.2 (a) yang dapat digunakan untuk menunjukkan $2 + 3 = 5$. Selanjutnya, operasi himpunan selain gabungan adalah irisan.

DEFINISI

Irisan dari himpunan: $A \cap B$

Irisan dari himpunan A dan B ditulis $A \cap B$, adalah himpunan dari semua unsur-unsur yang ada pada himpunan A dan B .

Untuk lebih memahami definisi irisan dari himpunan, coba perhatikan contoh 2.5.

Contoh 2.5

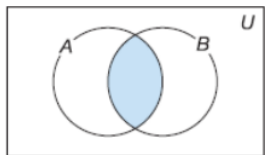
Tentukan irisan dari pasangan himpunan yang diberikan

- a $\{1,2,3\} \cap \{2,4,6\}$
- b $\{2,3,5,7,11\} \cap \{1,3,5,7\}$
- c $\{1,3,5\} \cap \{1,3,5\}$
- d $\{a,b\} \cap \{c,d\}$

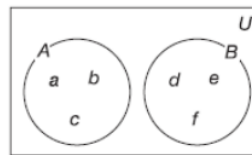
Solusi

- a $\{1,2,3\} \cap \{2,4,6\} = \{2\}$, karena hanya 2 yang merupakan unsur di kedua himpunan
- b $\{2,3,5,7,11\} \cap \{1,3,5,7\} = \{3,5,7\}$, karena hanya 3,5,7 yang merupakan unsur di kedua himpunan
- c $\{1,3,5\} \cap \{1,3,5\} = \{1,3,5\}$, karena hanya 1,3,5 yang merupakan unsur di kedua himpunan
- d $\{a,b\} \cap \{c,d\} = \emptyset$

Daerah yang berwarna biru pada Gambar 2.3 berikut merepresentasikan $A \cap B$, sedangkan dua himpunan yang hasil irisannya adalah himpunan kosong ditunjukkan pada gambar 2.4. Dari Gambar 2.4 dapat kita analisis bahwa dua himpunan saling lepas jika dan hanya jika irisannya merupakan himpunan kosong.



Gambar 2.3



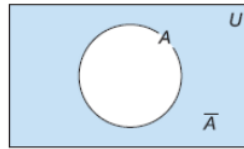
Gambar 2.4

DEFINISI

KOMPLEMEN DARI SUATU HIMPUNAN: $\bar{A}$

Komplemen dari suatu himpunan A, ditulis $\bar{A}$ adalah himpunan dari semua unsur-unsur di semesta (dinotasikan dengan U) yang tidak ada di A

Daerah berwarna biru pada Gambar 2.5 merepresentasikan $\bar{A}$



Gambar 2.5

Contoh 2.6

- a Tentukan $\bar{A}$, jika $U = \{h, i, j, k\}$ dan $A = \{k\}$
- b Tentukan $\bar{B}$, jika $U = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ dan $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
- c Tentukan $\bar{A} \cup \bar{B}$ dan $\overline{A \cap B}$, jika $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 3, 5\}$, dan $B = \{1, 5\}$

Solusi

- a $\bar{A} = \{h, i, j\}$
- b $\bar{B} = \{1, 3, 5, 7\}$
- c $\bar{A} \cup \bar{B} = \{1, 4, 6\} \cup \{2, 3, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$
- d $\overline{A \cap B} = \{\bar{5}\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

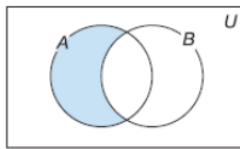
Operasi himpunan yang lain sebagai dasar untuk pengurangan adalah selisih dari himpunan

DEFINISI

Selisih dari himpunan: $A - B$

Selisih himpunan A dan B , ditulis $A - B$ adalah himpunan dari semua unsur-unsur di A yang bukan di B

Dalam notasi pembentuk himpunan, $A - B = \{x | x \in A \text{ dan } x \notin B\}$. Untuk lebih jelasnya perhatikan Gambar 2.6 berikut. Daerah berwarna biru pada Gambar 2.6 berikut merepresentasikan $A - B$



Gambar 2.6

CONTOH 2.7

- a $\{h, i, j, k\} - \{k\}$
- b $\{a, b, c\} - \{e\}$
- c $\{0, 2, 4, 6, 8, 10\} - \{0, 4, 8\}$

SOLUSI

- a $\{h, i, j, k\} - \{k\} = \{h, i, j\}$
- b $\{a, b, c\} - \{e\} = \{a, b, c\}$
- c $\{0, 2, 4, 6, 8, 10\} - \{0, 4, 8\} = \{2, 6, 10\}$

Coba perhatikan himpunan kedua pada contoh 2.7 (c), himpunan kedua pada contoh 2.7 (c) merupakan subset dari himpunan pertama. Cara lain mengombinasikan dua himpunan untuk membentuk himpunan ketiga disebut *Cartesian product*. Untuk mendefinisikan *Cartesian product*, kita perlu mempunyai konsep pasangan terurut. Suatu pasangan terurut, ditulis (a,b), adalah pasangan dari unsur-unsur, dimana salah satu unsurnya ditunjukkan sebagai yang pertama (a sebagai unsur yang pertama dalam kasus (a,b)) dan unsur yang lainnya sebagai yang kedua (b sebagai unsur yang kedua dalam kasus (a,b)). Notasi dari suatu pasangan terurut berbeda dengan himpunan yang terdiri dari dua anggota atau unsur, karena pasangan terurut lebih memprioritaskan pada urutan. Sebagai contoh $\{1,2\} = \{2,1\}$ jika dipandang sebagai himpunan karena keduanya memiliki unsur-unsur yang sama., akan tetapi $(1,2) \neq (2,1)$ karena kedua himpunan ini dipandang sebagai pasangan terurut karena urutan dari unsur-unsurnya berbeda. Perlu diperhatikan bahwa dua pasangan terurut (a, b) dan (c, d) adalah sama jika dan hanya jika $a = c$ dan $b = d$

DEFINISI

Cartesian Product Dari Himpunan: $A \times B$

Cartesian Product dari himpunan A dengan himpunan B , ditulis $A \times B$ dan dibaca “A cross B” adalah himpunan dari semua pasangan terurut (a, b) dimana $a \in A$ dan $b \in B$

Jika dituliskan dalam notasi pembentuk himpunan $A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ dan } b \in B\}$

Contoh 2.8

Tentukan Cartesian Product dari pasangan himpunan yang diberikan

a $\{5\} \times \{a, b, c\}$

b $\{1, 2, 3\} \times \{a, b\}$

c $\{2, 3\} \times \{1, 4\}$

Solusi

a $\{5\} \times \{a, b, c\} = \{(5, a), (5, b), (5, c)\}$

b $\{1, 2, 3\} \times \{a, b\} = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$

c $\{2, 3\} \times \{1, 4\} = \{(2, 1), (2, 4), (3, 1), (3, 4)\}$

Ketika kita ingin menemukan *Cartesian Product* dari himpunan, maka semua pasangan yang terbentuk terdiri dari dua unsur dimana unsur pertama berasal dari himpunan pertama dan unsur kedua berasal dari himpunan kedua. Coba perhatikan contoh 2.8 (b), ada tiga unsur di himpunan pertama, dua unsur di himpunan kedua, dan ada enam di *cartesian product* (diperoleh dari $3 \times 2 = 6$). Dengan hal yang serupa, himpunan pada contoh 2.8 (c) dapat digunakan untuk menemukan hasil kali bilangan cacah yaitu $2 \times 2 = 4$.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi himpunan, kerjakanlah latihan berikut ini.

1. Sebutkan tiga contoh himpunan yang Anda ketahui.
2. Tunjukkan himpunan berikut dengan mendaftar anggota-anggotanya

Pendidikan Matematika Sekolah Dasar

- a Bilangan cacah antara 5 dan 9
 - b Bilangan asli yang kurang dari 15
3. Benar atau salah?
- a $7 \in \{6,7,8,9\}$
 - b $\{1,2,3\} \subseteq \{1,2,5\}$
 - c $\{2\} \not\subseteq \{1,2\}$
4. $A = \{2,4,6,8,10, \dots\}$ dan $B = \{4,8,12,16,20, \dots\}$ kemudian jawablah pertanyaan berikut.
- a Tentukan himpunan $A \cup B$
 - b Tentukan $A \cap B$
 - c Apakah $B \subseteq A$? Jelaskan
 - d Apakah A ekuivalen dengan B? Jelaskan
5. Misalkan $A = \{0,1,2,3,4,5\}$, $B = \{0,2,4,6,8,10\}$ dan $C = \{0,4,8\}$, kemudian tentukan
- a $A \cup B$
 - b $B \cup C$
 - c $A \cap B$
 - d $B - C$
 - e $(A \cup B) - C$

RANGKUMAN

1. Himpunan dapat dinyatakan dalam tiga cara yaitu 1) deskripsi verbal, 2) mendaftar anggota-anggotanya dan dipisahkan dengan tanda koma, dan 3) notasi pembentuk himpunan.
2. Korespondensi satu-satu antara dua himpunan A dan B adalah suatu pasangan dari unsur-unsur di A dengan unsur-unsur di B sehingga setiap unsur di A bersesuaian tepat satu unsur di B, dan sebaliknya. Jika ada suatu korespondensi satu-satu antara himpunan A dan B, kita tulis $A \sim B$ dan kita katakan bahwa A dan B ekuivalen.
3. Himpunan A dikatakan subset dari B, ditulis $A \subseteq B$, jika dan hanya jika setiap unsur di A juga unsur di B
4. Ada lima jenis operasi pada himpunan, yaitu:

Pendidikan Matematika Sekolah Dasar

- a Gabungan dari dua himpunan A dan B ditulis $A \cup B$ adalah himpunan yang terdiri dari semua unsur yang ada di A atau B (atau keduanya).
- b Irisan dari himpunan A dan B ditulis $A \cap B$, adalah himpunan dari semua unsur-unsur yang ada pada himpunan A dan B .
- c Komplemen dari suatu himpunan A , ditulis $\bar{A}$ adalah himpunan dari semua unsur-unsur di semesta (dinotasikan dengan U) yang tidak ada di A .
- d Selisih himpunan A dan B , ditulis $A - B$ adalah himpunan dari semua unsur-unsur di A yang bukan di B .
- e Cartesian Product dari himpunan A dengan himpunan B , ditulis $A \times B$ dan dibaca “ A cross B ” himpunan dari semua pasangan terurut (a, b) dimana $a \in A$ dan $b \in B$.

TES FORMATIF

Untuk memeriksa sejauh mana pemahaman Anda mengenai himpunan dan bilangan cacah, coba kerjakan masalah-masalah di bawah ini.

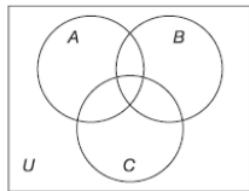
1. Berapa banyak korespondensi satu-satu yang berbeda dan memungkinkan dari himpunan $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $B = \{a, b, c, d\}$
2. Seorang profesor di suatu universitas menanyakan kepada 42 mahasiswa yang ada di kelasnya hari apa saja mereka belajar menjelang akhir pekan?
 - 9 siswa belajar di hari Jumat
 - 18 siswa belajar di hari Sabtu
 - 30 siswa belajar di hari Minggu
 - 3 siswa belajar di hari Jumat dan Sabtu
 - 10 siswa belajar di hari Sabtu dan Minggu
 - 6 siswa belajar di hari Jumat dan Minggu
 - 2 siswa belajar di hari Jumat, Sabtu, dan Minggu

Asumsikan bahwa 42 siswa yang diresponsensi menjawab secara jujur dan jawablah pertanyaan berikut ini.

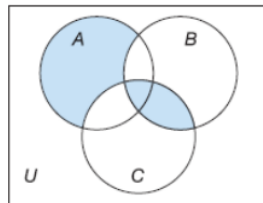
- a. Berapa banyak siswa yang belajar pada hari Minggu tapi bukan selain Jumat atau Sabtu?
- b. Berapa banyak siswa yang kesemuanya belajar pada suatu hari?

Pendidikan Matematika Sekolah Dasar

- c. Berapa banyak siswa yang tidak belajar pada ketiga hari tersebut yaitu Jumat, Sabtu, dan Minggu?
3. Diberikan himpunan semesta $\{1,2,3, \dots, 20\}$, dan himpunan A, B, dan C ditentukan di bawah ini.
- $$A = \{2,4,0,1,3,5,6\}$$
- $$B = \{10,11,12,1,2,7,6,14\}$$
- $$C = \{18,19,6,11,16,12,9,8\}$$
- a. Tugas Anda adalah letakkan bilangan-bilangan dari himpunan semesta ke tempat yang cocok pada diagram Venn berikut.



- b. Arsir daerah pada diagram Venn berikut untuk merepresentasikan himpunan $A - \overline{B \cup C}$
4. Representasikan daerah yang berwarna pada diagram Venn berikut dengan menggunakan notasi himpunan yang tepat



5. Nita mempunyai 8 rok dan 7 kemeja. Coba tunjukkan bagaimana konsep *Cartesian Product* dapat digunakan untuk menentukan pasangan rok dan kemeja yang berbeda.
6. Jika $n(A) = 71$, $n(B) = 53$, dan $n(A \cap B) = 27$. Tentukan $n(A \cup B)$
7. Misalkan $A = \{x|x \text{ adalah huruf alfabet}\}$ dan $B = \{10,11,12, \dots 40\}$ Apakah hal ini memungkinkan membentuk korespondensi satu-satu antara himpunan A dan B? Jika ya, deskripsikan korespondensinya, tetapi jika tidak, jelaskan mengapa?

Pendidikan Matematika Sekolah Dasar

8. Tentukan kapan kondisi berikut berlaku.
 - a. Kapan berlaku $D \cap E = D$
 - b. Kapan berlaku $D \cap E = D \cup E$
 - c. Kapan berlaku $D \cup E = D$
9. Rumahmu dapat dicat dengan 7 pilihan warna eksterior dan 15 warna interior. Asumsikan bahwa Anda dapat memilih hanya 1 warna eksterior dan 1 warna interior. Berapa banyak cara yang berbeda untuk mengecat rumah Pak Arif tersebut?
10. Suatu ruang kelas mempunyai 13 meja dan 13 kursi, Anda ingin menyusun meja dan kursi sehingga setiap meja berpasangan dengan satu kursi. Berapa banyak susunan meja dan kursi yang ada.

BAB 3

BILANGAN CACAH, OPERASI, DAN SIFAT-SIFANYA

Kebanyakan orang menggunakan bilangan cacah untuk menyelesaikan latihan atau soal-soal. Hampir sebagai besar dari mereka belum sepenuhnya memaknai bilangan cacah. Padahal bilangan cacah sangat berkaitan dengan kehidupan kita sehari-hari. Orang akan mudah menemukan alamat rumah kita karena adanya nomor dimana nomor rumah merupakan aplikasi dari bilangan cacah. Kegiatan jual beli, perbankan, penghitungan jarak, kecepatan merupakan beberapa aktivitas yang melibatkan bilangan cacah. Selain itu bilangan cacah merupakan dasar untuk mempelajari pecahan, desimal, dan bilangan bulat.

Operasi-operasi pada bilangan cacah seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian merupakan dasar aritmatika. Guru-guru sekolah dasar menjelaskan makna penjumlahan melalui beberapa contoh akan tetapi definisi secara formal juga penting untuk dipahami, mengingat seorang guru harus memiliki pengetahuan konsep yang lebih baik daripada siswanya. Definisi mengenai penjumlahan dapat dikaitkan dengan gabungan dari himpunan yang saling lepas.

Selanjutnya definisi pengurangan berhubungan dengan penjumlahan, dimana pengurangan dikenal sebagai invers dari operasi penjumlahan. Definisi perkalian dapat dipandang sebagai penjumlahan berulang, dan definisi pembagian dapat dipandang sebagai pengurangan berulang atau dapat dipandang sebagai invers dari perkalian. Berikut akan dipaparkan definisi mengenai operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian.

Kompetensi Dasar:

Kompetensi dasar dalam mempelajari materi bilangan cacah, operasi, dan sifat-sifatnya adalah mahasiswa mampu menerapkan konsep bilangan cacah dalam menyelesaikan masalah.

Indikator

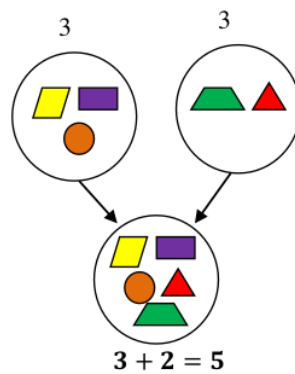
- a. Mahasiswa dapat menjelaskan pengertian bilangan cacah
- b. Mahasiswa dapat menjelaskan sifat-sifat penjumlahan bilangan cacah
- c. Mahasiswa dapat menjelaskan sifat-sifat perkalian bilangan cacah
- d. Mahasiswa dapat menerapkan konsep bilangan cacah dalam penyelesaian masalah.

PENJUMLAHAN DAN PENGURANGAN

PENJUMLAHAN

Model Himpunan

Untuk menemukan “ $3 + 2$ ” menggunakan model himpunan maka pertama-tama kita harus merepresentasikan dua himpunan yang saling lepas. Himpunan pertama yaitu A memiliki 3 objek, dan himpunan yang lainnya yaitu B yang memiliki 2 objek. Coba ingat kembali, $n(A)$ menandakan banyaknya unsur-unsur pada himpunan A . Perhatikan Gambar 3.1 dimana $n(A) = 3$ dan $n(B) = 2$



Gambar 3.1

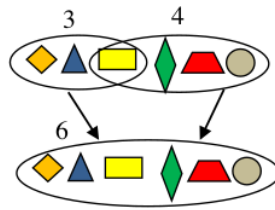
Melalui himpunan, penjumlahan dapat dipandang sebagai kombinasi unsur-unsur dari dua himpunan untuk membentuk gabungan dan kemudian menghitung jumlah unsur-unsur dalam gabungan $n(A \cup B) = 5$. Dalam kasus ini $n(A) + n(B) = n(A \cup B)$. Contoh Gambar 3.1 menyarankan definisi dari penjumlahan.

DEFINISI

Penjumlahan dari Bilangan Cacah

Misalkan a dan b sebarang dari dua bilangan cacah. Jika A dan B adalah himpunan saling lepas dengan $a = n(A)$ dan $b = n(B)$, maka $a + b = n(A \cup B)$

Ketika menggunakan himpunan untuk mendiskusikan penjumlahan maka kita harus hati-hati dalam menggunakan istilah himpunan saling lepas. Dalam Gambar 3.2, himpunan A dan B tidak saling lepas karena $n(A \cap B) = 1$.



Gambar 3.2

Irisan kedua himpunan pada Gambar 3.2 tidak kosong, sehingga $n(A) + n(B) \neq n(A \cup B)$. Gambar 3.2 bukan merupakan contoh penjumlahan menggunakan model himpunan, tetapi Gambar 3.2 lebih memberikan pernyataan umum tentang jumlah unsur-unsur dalam gabungan dua himpunan yang direpresentasikan dengan $n(A) + n(B) - n(A \cap B) = n(A \cup B)$. Contoh-contoh berikut mengilustrasikan bagaimana semestinya kita menggunakan himpunan saling lepas untuk memodelkan penjumlahan.

CONTOH 3.1

Gunakan definisi penjumlahan untuk menghitung $4 + 5$

SOLUSI

Misalkan $A = \{1,2,3,4\}$ dan $B = \{7,8,9,10,11\}$. A dan B adalah himpunan yang saling lepas dimana $n(A) = 4$ dan $n(B) = 5$. Oleh karena itu

$$\begin{aligned} 4 + 5 &= n(A \cup B) \\ &= n(\{1,2,3,4\} \cup \{7,8,9,10\}) \\ &= n(\{1,2,3,4,7,8,9,10,11\}) \\ &= 9 \end{aligned}$$

Penjumlahan disebut sebagai operasi biner karena dua (bi) bilangan dikombinasikan untuk menghasilkan bilangan yang unik (satu dan hanya satu). Perkalian adalah contoh lain dari operasi biner. Irisan, gabungan, dan selisih himpunan adalah operasi biner yang menggunakan himpunan.

Sifat-Sifat Penjumlahan Bilangan Cacah

a Sifat Tertutup Untuk Penjumlahan Bilangan Cacah

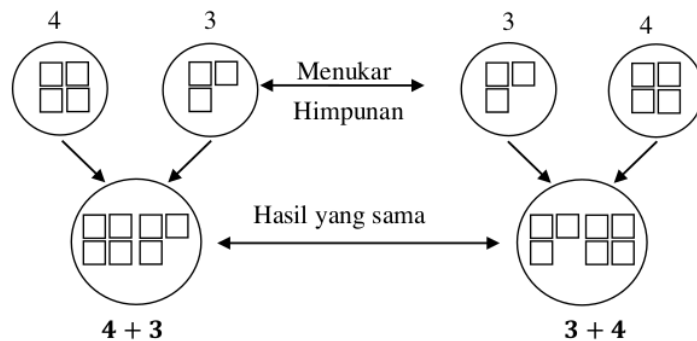
Jumlah dari sebarang dua bilangan cacah adalah bilangan cacah

Suatu operasi pada himpunan memenuhi sifat tertutup jika himpunan tersebut tertutup terhadap operasi yang diberikan. Sebagai contoh, himpunan semua bilangan cacah genap $\{0,2,4, \dots\}$ dan himpunan semua bilangan cacah ganjil $\{1,3,5, \dots\}$. Himpunan bilangan cacah genap tertutup terhadap penjumlahan karena jumlah dari dua bilangan genap adalah bilangan genap, sedangkan himpunan bilangan ganjil tidak tertutup terhadap penjumlahan karena jumlah dari dua bilangan ganjil bukanlah bilangan ganjil, misalnya jumlah dari $1 + 3$ bukan merupakan bilangan ganjil.

b Sifat Komutatif (*Commutative*) Untuk Penjumlahan Bilangan Cacah

Misalkan a dan b adalah sebarang bilangan cacah, maka $a + b = b + a$

Perlu diperhatikan bahwa asal kata “*commutative*” adalah “*commute*” yang artinya menukar. Gambar 3.5 mengilustrasikan sifat komutatif dari $3 + 4$ dan $4 + 3$

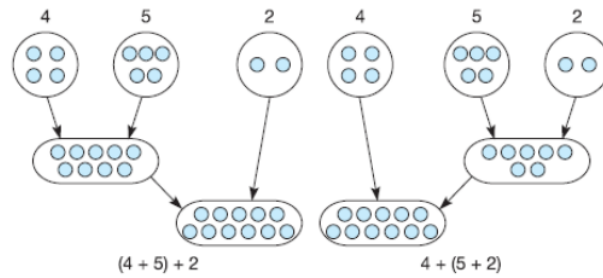


Gambar 3.3

c Sifat Asosiatif

Misalkan a , b , dan c adalah sebarang bilangan cacah, maka $(a + b) + c = a + (b + c)$

Asal kata asosiatif adalah asosiasi yang artinya menggabungkan atau dalam kasus ini adalah menyatukan kembali. Dan contoh berikut, menggambarkan sifat ini.



Gambar 3.4

d Sifat Identitas

Ada suatu bilangan cacah yang unik yaitu 0, sedemikian sehingga untuk semua bilangan cacah a berlaku $a + 0 = a = 0 + a$

Keempat sifat penjumlahan dapat diaplikasikan untuk membantu menyederhanakan perhitungan, seperti pada contoh berikut.

CONTOH 3.2

Dengan mengaplikasikan keempat sifat penjumlahan, tentukan hasil dari penjumlahan berikut.

- a. $44 + 16$ b. $38 + (21 + 12)$ c. $53 + 37$

SOLUSI

- a. $44 + 16 = (40 + 4) + (10 + 6)$
 $= (40 + 10) + (4 + 6)$ komutatif dan asosiatif
 $= 50 + 10$
 $= 60$
- b. $38 + (21 + 12) = 38 + (12 + 21)$ komutatif
 $= (38 + 12) + 21$ asosiatif
 $= 50 + 21$
 $= 71$
- c. $53 + 37 = (50 + 3) + 37$
 $= 50 + (3 + 37)$ asosiatif
 $= 50 + 40$
 $= 90$

PENGURANGAN

Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya pada awal Bab 3 bahwa definisi pengurangan berhubungan dengan penjumlahan, dimana pengurangan dikenal sebagai invers dari operasi penjumlahan

1 DEFINISI

Pengurangan Bilangan Cacah

3 Untuk sebarang bilangan cacah a dan b , $a - b = c$ jika dan hanya jika $a = b + c$, dimana c merupakan bilangan cacah yang unik/tunggal

Perkalian dan Sifat-Sifatnya

Perkalian dapat didefinisikan sebagai penjumlahan berulang

DEFINISI

3 Misalkan a dan b adalah sebarang bilangan cacah dimana $a \neq 0$, maka

$$ab = \underbrace{b + b + \cdots + b}_{a \text{ suku}}$$

8 Jika $a = 1$, maka $ab = 1 \cdot b = b$, dan juga $0 \cdot b = 0$ untuk semua b

Perkalian mengombinasikan dua bilangan dan menghasilkan bilangan tunggal, sehingga perkalian masuk dalam operasi biner. Bilangan ab dibaca “ a kali b ”. Bilangan-bilangan a dan b disebut sebagai faktor dari ab . Perkalian ab dapat juga ditulis sebagai “ $a \cdot b$ ” atau “ $a \times b$ ”. Selanjutnya perhatikan kembali bahwa $0 \cdot b = 0$ untuk setiap b , sehingga hasil dari perkalian nol dengan sebarang bilangan cacah adalah nol.

Sifat-Sifat Perkalian Bilangan Cacah

Anda kemungkinan akan mengamati apakah perkalian dari dua bilangan cacah akan selalu menghasilkan bilangan cacah. Fakta ini akan ditunjukkan melalui sifat-sifat perkalian dari bilangan cacah.

a Sifat Tertutup Perkalian Bilangan Cacah

1 Hasil kali dari dua bilangan cacah adalah bilangan cacah

b Sifat Komutatif Perkalian Bilangan Cacah

3
Misalkan a dan b adalah sebarang bilangan cacah, maka $ab = ba$

c Sifat Asosiatif Perkalian Bilangan Cacah

4
Misalkan a , b , dan c adalah sebarang bilangan cacah, maka $a(bc) = (ab)c$

6
d Sifat Identitas Perkalian Bilangan Cacah

Bilangan 1 adalah bilangan cacah yang unik sehingga setiap bilangan cacah a berlaku

$$a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$$

Karena sifat ini, bilangan 1 disebut sebagai identitas untuk perkalian.

e Sifat Distributif Perkalian Terhadap Penjumlahan

3
Misalkan a , b , dan c adalah sebarang bilangan cacah, maka

$$a(b + c) = ab + ac$$

$a(b + c) = ab + ac$ dapat ditulis juga menjadi $(b + c)a = ba + ca$ karena adanya sifat komutatif. Perhatikan bahwa sifat distributif maknanya adalah “mendistribusikan” a ke b dan c

1
f Sifat Perkalian dengan Nol

Untuk setiap bilangan cacah a berlaku

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

g Sifat Distributif Perkalian Terhadap Pengurangan

1
Misalkan a , b , dan c adalah sebarang bilangan cacah, dimana $b \geq c$, maka

$$a(b - c) = ab - ac$$

Pembagian

Definisi pembagian dapat dipandang sebagai invers dari perkalian.

Definisi

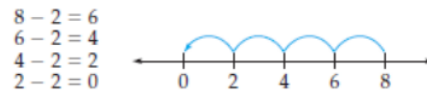
Pembagian Bilangan Cacah

1
Jika a dan b adalah sebarang bilangan cacah dengan $b \neq 0$, maka $a \div b = c$ jika 8
dan hanya jika $a = bc$ untuk beberapa bilangan cacah c

Simbol $a \div b$ dibaca a dibagi oleh b , dimana a adalah *dividend*, b adalah pembagi, dan c adalah hasil bagi.

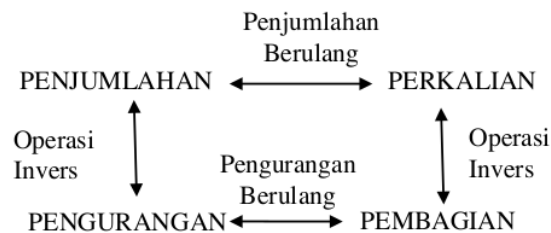
Pendidikan Matematika Sekolah Dasar

Pembagian juga dapat dipandang sebagai pengurangan berulang. Sebagai contoh, Andi memiliki 8 kelereng dan dia ingin memberikan 2 kelereng kepada setiap orang temannya. Untuk menggambarkan berapa banyak orang yang mendapatkan kelereng dari Andi tersebut dapat menggunakan konsep pengurangan berulang seperti pada Gambar 3.3.



Gambar 3.3

Permasalahan bilangan cacah seperti $8 \div 2$ dapat dipandang sebagai berikut yaitu “berapa banyak 2 dikurangkan dari 8 sampai tidak bersisa”, dan jawabannya adalah 4. Jadi untuk kasus tersebut banyak teman Andi yang menerima kelereng adalah 4 orang. Selanjutnya hubungan antara operasi bilangan cacah dapat disimpulkan pada Gambar 3.4



Gambar 3.4

1 Sifat Pembagian Nol

Jika $a \neq 0$, maka $0 \div a = 0$

Pembagian oleh nol adalah tidak terdefinisi

Tahukah Anda, mengapa pembagian oleh nol tidak terdefinisi. Berikut ini adalah penjelasannya.

- Untuk kasus 1
 $a \div 0$, dimana $a \neq 0$

Pendidikan Matematika Sekolah Dasar

Jika $a \div 0 = c$ maka $a = 0 \cdot c$, sehingga $a = 0$. Akan tetapi ini bertentangan dengan syarat di awal bahwa $a \neq 0$. Oleh karena itu $a \div 0$ tidak terdefinisi.

- Untuk kasus 2

$$0 \div 0$$

Jika $0 \div 0 = c$, maka $0 = 0 \cdot c$. Hal ini berarti untuk sebarang nilai c dapat disubstitusikan pada persamaan $0 = 0 \cdot c$. Dengan kata lain tidak ada nilai c tunggal yang memenuhi persamaan $0 = 0 \cdot c$ sehingga dapat disimpulkan pembagian dengan nol tidak terdefinisi.

Coba sekarang perhatikan contoh pembagian $13 \div 4$. Meskipun hasil pembagian dari $13 \div 4$ bukan merupakan bilangan cacah, ini menjadi hal yang menarik untuk dibahas. Misalnya ada 13 buah jeruk dibagikan secara merata kepada 4 orang anak. Dalam contoh ini jika setiap anak mendapatkan banyak jeruk yang sama maka tiap anak akan mendapatkan 3 buah jeruk dan ada sisa 1 jeruk yang tidak terbagikan. Kasus ini merupakan salah satu contoh pembagian bilangan cacah yang memiliki sisa.

Algoritma Pembagian

Jika a dan b adalah sebarang bilangan cacah, dengan $b \neq 0$, maka akan ada bilangan cacah q dan r yang unik atau tunggal sehingga $a = bq + r$ dimana $0 \leq r < b$

b disebut sebagai pembagi, q disebut sebagai hasil bagi, dan r disebut sebagai sisa. Perlu diperhatikan bahwa sisa itu selalu kurang dari atau sama dengan pembagi. Untuk lebih memahami konsep algoritma pembagian, perhatikan contoh berikut

Contoh 3.3

Tentukan hasil bagi dan sisa dari pembagian berikut

a. $37 \div 9$ b. $44 \div 13$ c. $96:8$

Solusi

a. $9 \times 4 = 36$, sehingga $37 = 9 \times 4 + 1$. Jadi hasil baginya adalah 4 dan sisanya adalah 1

Pendidikan Matematika Sekolah Dasar

b. $13 \times 3 = 39$, sehingga $44 = 13 \times 3 + 5$. Jadi hasil baginya adalah 3 dan sisanya adalah 5

c. $8 \times 12 = 96$, sehingga $96 = 8 \times 12 + 0$. Jadi hasil baginya adalah 12 dan sisanya adalah 0

Ordering (Pengurutan) dan Eksponen

Bilangan cacah dapat diurutkan dalam tiga cara, 1) dengan cara membilang, 2) garis bilangan cacah, dan 3) korespondensi satu-satu. Kita dapat juga mendefinisikan penjumlahan bilangan cacah dengan pendekatan yang lain yaitu dengan menggunakan definisi kurang dari

DEFINISI

“Kurang dari” untuk bilangan cacah

Untuk sebarang dua bilangan cacah a dan b , $a < b$ (atau $b > a$), jika dan hanya jika ada suatu bilangan cacah bukan nol yaitu n sedemikian sehingga $a + n = b$

Sebagai contoh $6 < 10$ karena $6 + 4 = 10$ dan $14 > 9$ karena $9 + 5 = 14$

Definisi kurang dari berhubungan dengan sifat transitif yang umum kita kenal sebagai sifat transitif kurang dari untuk bilangan cacah.

Sifat Transitif “Kurang Dari” Untuk Bilangan Cacah

Untuk semua bilangan cacah a , b , dan c , jika $a < b$ dan $b < c$, maka $a < c$

Tidak hanya perkalian yang dipandang sebagai penjumlahan berulang dan pembagian dapat dipandang sebagai pengurangan berulang, tetapi konsep eksponen juga dipandang sebagai perkalian berulang.

DEFINISI

Eksponen Bilangan Cacah

Misalkan a dan m adalah sebarang bilangan cacah dengan $m \neq 0$, maka

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ faktor}}$$

a^m dibaca a pangkat m , dimana m disebut sebagai eksponen atau pangkat dari a dan a disebut sebagai bilangan pokok. Sebagai contoh 4^2 dibaca “empat pangkat dua” dan dapat dijabarkan menjadi $4 \times 4 = 16$, 3^3 dibaca “tiga pangkat tiga” dan dapat dijabarkan menjadi $3 \times 3 \times 3 = 27$. Pada sub bab eksponen ini ada beberapa hal yang menarik dimana hasil perkalian atau pembagian antar eksponen dapat direpresentasikan menggunakan eksponen tunggal. Contoh 3.3 berikut akan memperdalam pemahaman Anda tentang eksponen.

Contoh 3.3

Tuliskan kembali ekspresi berikut menggunakan eksponen tunggal

a. $2^3 \cdot 2^4$

b. $3^4 \cdot 3^5$

Solusi

$$2^3 \cdot 2^4 = (2.2.2) \cdot (2.2.2.2) = 2^7$$

$$3^4 \cdot 3^5 = (3.3.3.3) \cdot (3.3.3.3.3) = 3^9$$

Terkait dengan contoh 3.3, ada suatu teorema yang mengatakan bahwa

Misalkan a , m , dan n adalah sebarang bilangan cacah dimana m dan n bukan nol, maka $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Bukti

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \dots a}_{m \text{ faktor}} \cdot \underbrace{a \cdot a \dots a}_{n \text{ faktor}} = \underbrace{a \cdot a \dots a}_{m+n \text{ faktor}} = a^{m+n}$$

Contoh 3.4

Tuliskan kembali ekspresi berikut menggunakan eksponen tunggal

a. $2^3 \cdot 5^3$

b. $3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2$

Solusi

$$a. 2^3 \cdot 5^3 = (2.2.2)(5.5.5) = (2.5) \cdot (2.5) \cdot (2.5) = (2.5)^3$$

$$b. 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 = (3.3)(7.7)(11.11) = (3.7.11)(3.7.11) = (3.7.11)^2$$

Solusi pada contoh 3.4 mengarahkan kita pada teorema berikut.

TEOREMA

Misalkan a , b , dan m adalah sebarang bilangan cacah dimana m bukan nol, maka

$$a^m \cdot b^m = (ab)^m$$

Bukti

$$a^m \cdot b^m = \underbrace{a \cdot a \dots a}_{m \text{ faktor}} \cdot \underbrace{b \cdot b \dots b}_{m \text{ faktor}} = \underbrace{(ab)(ab) \dots (ab)}_{m \text{ pasang faktor}} = (ab)^m$$

Contoh selanjutnya yaitu contoh 3.5 akan menyajikan bagaimana menyederhanakan ekspresi $(a^m)^n$

Contoh 3.5

Tulis kembali ekspresi berikut dengan eksponen tunggal

a. $(3^4)^2$

b. $(6^5)^3$

Solusi

a. $(3^4)^2 = (3^4)(3^4) = 3^{4+4} = 3^8 = 3^{4 \cdot 2}$

b. $(6^5)^3 = (6^5)(6^5)(6^5) = 6^{5+5+5} = 6^{15} = 3^{5 \cdot 3}$

Secara umum contoh 3.5 dapat digeneralisasi melalui teorema berikut.

TEOREMA

Misalkan a , m , dan n adalah sebarang bilangan cacah dimana m dan n bukan nol, maka

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Bukti dari teorema ini hampir sama dengan bukti pada teorema sebelumnya, dan Anda dapat mencobanya sendiri sebagai latihan.

Contoh 3.6

Tulis kembali ekspresi berikut dengan eksponen tunggal

a. $6^5 \div 6^3$

b. $7^8 \div 7^5$

Solusi

a. $6^5 \div 6^3 = \frac{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6}{6 \cdot 6 \cdot 6} = 6 \cdot 6 = 6^2$

b. $7^8 \div 7^5 = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7} = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3$

Solusi pada contoh 3.6 menyajikan bagaimana menyederhanakan ekspresi $a^m \div a^n$ dan secara umum solusi dari contoh 3.6 dapat digeneralisasi melalui teorema berikut.

Teorema

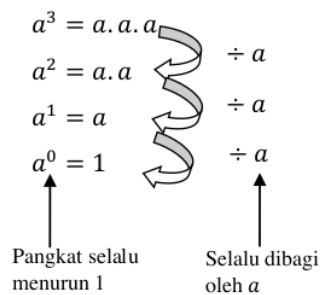
Misalkan a , m , dan n adalah sebarang bilangan cacah dimana $m > n$ dan a , m , dan n bukan nol, maka

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

DEFINISI**Nol sebagai Eksponen**

$a^0 = 1$ untuk setiap bilangan cacah $a \neq 0$

Tahukah Anda mengapa berlaku $a^0 = 1$ untuk setiap bilangan cacah $a \neq 0$? Pembuktian secara matematis memang dapat menjawab masalah ini, akan tetapi jika kita dihadapkan dengan pertanyaan dari siswa sekolah dasar, maka tidak mungkin kita akan menjelaskan dengan pembuktian matematis. Melalui penjelasan pola berikut, akan memudahkan anak sekolah dasar untuk menjawab pertanyaan mengapa $a^0 = 1$ untuk setiap bilangan cacah $a \neq 0$



Perhatikan kembali definisi nol sebagai eksponen, mengapa dalam definisi tersebut disyaratkan $a \neq 0$? Jika 0^0 , maka bagaimana solusinya? Untuk lebih memahaminya, coba perhatikan penjabaran berikut.

Pola 1

$$\begin{aligned}
 3^0 &= 1 \\
 2^0 &= 1 \\
 1^0 &= 1 \\
 0^0 &=?
 \end{aligned}$$

Pola 2

$$\begin{aligned}
 0^3 &= 0 \\
 0^2 &= 0 \\
 0^1 &= 0 \\
 0^0 &=?
 \end{aligned}$$

Pendidikan Matematika Sekolah Dasar

Jika kita melihat pola 1, maka jawaban untuk 0^0 seharusnya adalah 1 akan tetapi jika kita melihat pola 2 maka jawaban dari 0^0 adalah 0. Dari sini terjadilah ketidak konsistenan sehingga dapat disimpulkan 0^0 tidak terdefinisi.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi bilangan cacah dan operasinya, maka kerjakanlah latihan berikut.

1. Identifikasi sifat-sifat berikut.
 - a $7 + 5 = 5 + 7$
 - b $53 + 47 = 50 + 50$
 - c $1 + 0 = 1$
 - d $(53 + 48) + 7 = 60 + 48$
2. Penjumlahan dapat disederhanakan dengan menggunakan sifat asosiatif penjumlahan. Sebagai contoh $26 + 57 = 26 + (4 + 53) = (26 + 4) + 53 = 30 + 53 = 83$
Lengkapi pernyataan berikut
 - a $39 + 68 = 40 + \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$
 - b $25 + 56 = 30 + \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$
 - c $47 + 23 = 50 + \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$
3. Cari kombinasi yang memudahkan dan mempercepat Anda dalam menghitung penjumlahan berikut. Identifikasi sifat-sifat yang kamu gunakan.
 - a. $94 + 27 + 6 + 13$
 - b. $5 + 13 + 25 + 31 + 47$
4. Tentukan hasil bagi dan sisa untuk setiap soal berikut.
 - a $7 \div 3$
 - b $7 \div 1$
 - c $15 \div 5$
 - d $8 \div 12$
5. Tentukan nilai x
 - a $3^7 \cdot 3^x = 3^{13}$
 - b $(3^x)^4 = 3^{20}$
 - c $3^x \cdot 2^x = 6^x$

RANGKUMAN

1. Misalkan a dan b sebarang dari dua bilangan cacah. Jika A dan B adalah himpunan saling lepas dengan $a = n(A)$ dan $b = n(B)$, maka $a + b = n(A \cup B)$
2. Sifat-Sifat Penjumlahan Bilangan Cacah
 - a Sifat Tertutup Untuk Penjumlahan Bilangan Cacah
 - b Sifat Komutatif (*Commutative*) Untuk Penjumlahan Bilangan Cacah
 - c Sifat Asosiatif
 - d Sifat Identitas
 - e Perkalian dan Sifat-Sifatnya
3. Perkalian dapat didefinisikan sebagai penjumlahan berulang
4. Sifat-Sifat Perkalian Bilangan Cacah
 - a Sifat Tertutup Perkalian Bilangan Cacah
 - b Sifat Komutatif Perkalian Bilangan Cacah
 - c Sifat Asosiatif Perkalian Bilangan Cacah
 - d Sifat Identitas Perkalian Bilangan Cacah
 - e Sifat Distributif Perkalian Terhadap Penjumlahan
 - f Sifat Perkalian dengan Nol
 - g Sifat Distributif Perkalian Terhadap Pengurangan
5. Jika a dan b adalah sebarang bilangan cacah dengan $b \neq 0$, maka $a \div b = c$ jika dan hanya jika $a = bc$ untuk beberapa bilangan cacah c .
6. Pembagian oleh nol adalah tidak terdefinisi
7. Jika a dan b adalah sebarang bilangan cacah, dengan $b \neq 0$, maka akan ada bilangan cacah q dan r yang unik atau tunggal sehingga $a = bq + r$ dimana $r \leq 0 < b$
8. Misalkan a , m , dan n adalah sebarang bilangan cacah dimana m dan n bukan nol, maka $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
9. Misalkan a , b , dan m adalah sebarang bilangan cacah dimana m bukan nol, maka
$$a^m \cdot b^m = (ab)^m$$
10. Misalkan a , m , dan n adalah sebarang bilangan cacah dimana m dan n bukan nol, maka

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

11. Misalkan a , m , dan n adalah sebarang bilangan cacah dimana $m > n$ dan a , m , dan n bukan nol, maka

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

12. $a^0 = 1$ untuk setiap bilangan cacah $a \neq 0$

TES FORMATIF

Untuk memeriksa sejauh mana pemahaman Anda mengenai himpunan dan bilangan cacah, coba kerjakan masalah-masalah di bawah ini.

1. Bilangan 100 dapat diekspresikan menggunakan 9 digit 1, 2, 9, ... dengan tanda plus dan minus sebagai berikut.

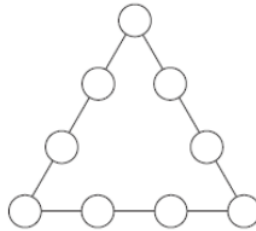
$$1 + 2 + 3 - 4 + 5 + 6 + 78 + 9 = 100$$

Tentukan bilangan yang menghasilkan 100 dengan menggunakan sembilan digit dan hanya dengan menggunakan 3 tanda plus atau minus.

2. Tempatkan bilangan 10 sampai 25 di dalam persegi satuan dengan syarat jumlah bilangan pada setiap baris, setiap kolom, dan setiap diagonalnya sama. (catatan: bilangan 10 sampai 25 digunakan tepat sekali).

25			
		19	17
18	16		
	23		10

3. Susun bilangan 1,2,3,4,5,6,7,8,9 dalam lingkaran berikut sehingga jumlah bilangan pada setiap sisi segitiga adalah 23



4. Tempatkan bilangan 1 sampai 16 pada persegi satuan berikut sehingga jumlah setiap baris, kolom, dan diagonalnya adalah sama.

	2		
5			8
	7	6	
		15	1

Pendidikan Matematika Sekolah Dasar

5. Ambil sebarang angka, tambahkan 10, kalikan dengan 2, tambahkan 100, bagi dengan 2, dan kurangi nomor aslinya. Jawabannya adalah jumlah menit dalam satu jam. Mengapa?
6. Harga buku tulis dua kali lipat dalam kurun waktu lima tahun. Misalkan harga terus berlipat ganda setiap lima tahun dan harga buku tulis itu Rp. 2.500,00 pada tahun 2000.
 - a Berapa harga buku tulis pada tahun 2015?
 - b Berapa harga buku tulis pada tahun 2040?
 - c Tulislah sebuah pernyataan yang mewakili harga buku tulis setelah n lima tahun.

7. Urutkan bilangan-bilangan berikut ini dari yang terkecil hingga terbesar dengan menggunakan sifat-sifat eksponen dan mental math

$$3^{22} \quad 4^{14} \quad 9^{10} \quad 8^{10}$$

8. Tentukan dua contoh bilangan, dimana $a, b \in$ bilangan cacah dan $a \cdot b = a + b$
9. Prediksi pola untuk tiga baris selanjutnya dan cek jawabanmu

$$1 = 1$$

$$3 + 5 = 8$$

$$7 + 9 + 11 = 27$$

$$13 + 15 + 17 + 19 = 64$$

$$21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 125$$

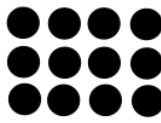
10. Tentukan banyak bulatan pada gambar ke- n !



Gambar 1



Gambar 2



Gambar 3

BAB 4***MENTAL MATH* DAN ESTIMASI****PENDAHULUAN**

Salah satu alasan sebagian besar orang menggunakan kalkulator adalah untuk mempermudah proses penghitungan. Selain mempermudah proses penghitungan, kalkulator juga dapat mempercepat dan mempersingkat waktu kita dalam menghitung. Penggunaan kalkulator juga merupakan salah satu bentuk dalam memanfaatkan teknologi.

Penggunaan kalkulator yang tidak tepat bagi siswa dapat mengakibatkan ketergantungan. Siswa yang terbiasa menggunakan kalkulator akan cenderung tidak percaya diri jika tidak menggunakan kalkulator. Pada dasarnya penggunaan kalkulator bagi siswa tidak menimbulkan permasalahan di masyarakat asalkan didahului dengan pemahaman konsep siswa yang jelas.

Proses menghitung dengan mudah dan cepat sebenarnya tidak hanya dengan menggunakan kalkulator tetapi juga dapat menggunakan metode “*mental math*”. *Mental math* melibatkan penggunaan teknik-teknik khusus yang dirancang untuk jenis masalah tertentu. Dengan kemampuan *mental math* yang baik, siswa dapat menghemat waktu tanpa mengeluarkan kalkulator (atau ponsel) setiap kali menyelesaikan tugas. Keterampilan siswa dalam melakukan “*mental math*” akan meningkatkan kemampuannya dalam memperkirakan hasil, sehingga mereka memiliki kemampuan yang lebih baik untuk menangkap kesalahan dari hasil penghitungan kalkulator. Sebagai contoh, kalkulator pada umumnya akan memberikan jawaban yang benar berdasarkan apa yang diketik, tapi jika Anda secara tidak sengaja mengetikkan nomor yang salah maka Anda mungkin tidak akan menangkap kesalahan jika Anda tidak memiliki keterampilan *mental math* yang baik.

Pada Bab 4 ini, kita akan melihat bagaimana strategi berpikir dalam mempelajari aritmatika dasar sehingga dapat diperluas ke bilangan multidigit, seperti yang akan dijelaskan pada subbab berikutnya.

Kompetensi Dasar:

Kompetensi dasar dalam mempelajari materi *mental math* dan estimasi adalah mahasiswa mampu menerapkan konsep *mental math* dan estimasi dalam menyelesaikan masalah.

Indikator

- a Mahasiswa dapat menyebutkan contoh-contoh *mentah math*
- b Mahasiswa dapat menyebutkan contoh-contoh estimasi
- c Mahasiswa dapat menerapkan konsep *mental math* dan estimasi dalam penyelesaian masalah

Contoh 4.1

Hitunglah secara mental soal-soal berikut.

a. $15 + (27 + 25)$ b. $21.17 - 13.21$ c. $(8 \times 7) \times 25$

d. $98 + 59$ e. $87 + 29$ f. $168 \div 3$

Solusi

a. $15 + (27 + 25) = 15 + (25 + 27) = (15 + 25) + 27 = 40 + 27 = 67$.

Perhatikan bahwa sifat komutatif dan asosiatif memainkan peran penting di sini.

b. $21.17 - 13.21 = 21.17 - 21.13 = 21 \times (17 - 13) = 21 \times 4 = 84$.

Menerapkan sifat komutatif dan distributif

c. $(8 \times 7) \times 25 = (7 \times 8) \times 25 = 7 \times (8 \times 25) = 7 \times 200 = 1400$.

Untuk lebih memudahkan penghitungan, perlu mengalikan terlebih dahulu bilangan 8 dan 25 sehingga menghasilkan 200. Poin c ini menerapkan sifat komutatif dan asosiatif

d. $98 + 59 = 98 + (2 + 57) = (98 + 2) + 57 = 100 + 57 = 157$.

Menggunakan sifat asosiatif karena dengan menghasilkan bilangan 100, kita bisa menghitungnya dengan lebih mudah

e. $87 + 29 = 80 + 20 + 7 + 9 = 100 + 16 = 116$.

Menerapkan sifat asosiatif dan komutatif.

f. $168 \div 3 = (150 + 18) \div 3 = (150 \div 3) + (18 \div 3) = 50 + 6 = 56$

Sifat komutatif, asosiatif, dan distributif memainkan peran penting dalam menyederhanakan penghitungan (seperti pada contoh 4.1) sehingga keterampilan *mental math* siswa dapat berkembang. Selain mengenal istilah *mental math*, pada bab 4 ini kita juga akan mengenal bilangan kompatibel. Bilangan kompatibel adalah bilangan-bilangan yang jika kita jumlah, kurang, kali, dan bagi, maka akan menghasilkan bilangan yang mudah untuk dihitung secara mental. Contoh bilangan-bilangan kompatibel adalah 86 dan 14 dalam operasi penjumlahan (karena $86 + 14 = 100$), 25 dan 8 dalam operasi perkalian (karena $25 \times 8 = 200$), serta 600 dan 30 dalam operasi pembagian (karena $600 \div 30 = 20$). Seperti halnya dalam contoh 4.1 (a), dalam menambahkan 15 dan 25 akan

Pendidikan Matematika Sekolah Dasar

menghasilkan bilangan 40 sehingga memudahkan kita untuk menjumlahkannya lagi dengan 27

Contoh 4.2

Hitunglah secara mental soal-soal berikut dengan menggunakan sifat-sifat dan atau menggunakan bilangan kompatibel

a. $(4 \times 13) \times 25$ b. $1710 \div 9$ c. 86×15

Solusi

a. $(4 \times 13) \times 25 = 13 \times (4 \times 25) = 1300$

b. $1710 \div 9 = (1800 - 90) \div 9 = (1800 \div 9) - (90 \div 9) = 200 - 10 = 190$

c. $86 \times 15 = 86 \times (10 + 5) = (86 \times 10 + 86 \times 5) = 860 + 430 = 1290$

Jumlah $43 + (38 + 17)$ dapat dipandang sebagai $38 + 60 = 98$ dengan menggunakan sifat komutatif, asosiatif, dan bilangan kompatibel (yaitu bilangan 43 dan 17. Menemukan hasil penjumlahan dari $43 + (36 + 19)$ adalah dengan memformulasikan kembali jumlah $36 + 19$ secara mental sebagai $37 + 18$, kita memperoleh jumlah $(43 + 37) + 18 = 80 + 18 = 98$. Proses memformulasikan kembali penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian sehingga memudahkan kita dalam memperoleh penghitungan secara mental disebut sebagai kompensasi. Penjumlahan $43 + (38 + 17)$ merupakan salah satu contoh dari kompensasi.

PENGHITUNGAN ESTIMASI

Proses estimasi banyak ditemukan dalam kehidupan sehari-hari. Contoh estimasi yang sering kita jumpai adalah, kita dapat memperkirakan atau menaksir jarak rumah ke sekolah, memperkirakan berapa lama perjalanan yang kita tempuh dari suatu kota ke kota lainnya, dan memperkirakan berapa harga yang harus dibayar saat kita belanja banyak barang di swalayan atau pasar tanpa harus menghitungnya dengan kalkulator. Estimasi merupakan proses menaksir atau memperkirakan jawaban saat menghitung melalui *mental math*. Estimasi merupakan keterampilan yang perlu dilatih kepada siswa sehingga dapat

Pendidikan Matematika Sekolah Dasar

memudahkan siswa dalam menghitung dan siswa tidak tergantung untuk selalu menggunakan kalkulator. Ada beberapa teknik dalam melakukan penghitungan estimasi yaitu metode *front-end* dan (*rounding*) pembulatan.

Metode *Front-End*

Metode ini berfokus hanya pada digit terdepan atau paling kiri dalam penjumlahan.

Contoh 4.3

Coba estimasi atau perkiraan hasil penghitungan berikut.

a $367 + 576$

b 294×53

Solusi

a $367 + 476$

Untuk estimasi ke bawah hasilnya adalah $300 + 500 = 800$

Untuk estimasi ke atas hasilnya adalah $400 + 600 = 1000$

Oleh karena itu rentang hasilnya adalah antara 800 sampai 1000

b 294×53

Untuk estimasi ke bawah hasilnya adalah $200 \times 50 = 10000$

Untuk estimasi ke atas hasilnya adalah $300 \times 60 = 18000$

Oleh karena itu rentang hasilnya adalah antara 10000 sampai 18000

PEMBULATAN

Pembulatan merupakan bentuk estimasi yang sering kita jumpai. Pembulatan merupakan cara dalam merubah masalah penghitungan sehingga memudahkan kita dalam menghitung secara mental. Pembulatan bilangan dilakukan dengan mengganti bilangan yang rumit dengan bilangan yang lebih sederhana. Seperti contoh berikut ketika kita ingin mengalikan 46×83 maka akan terasa rumit. Untuk memudahkan dalam menghitung, kita dapat menerapkan metode pembulatan seperti berikut

$$\begin{array}{ccc}
 46 & \times & 83 \\
 \text{Pembulatan} & & \text{Pembulatan} \\
 \text{ke atas} & & \text{ke bawah} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 50 \times 80 = 40000
 \end{array}$$

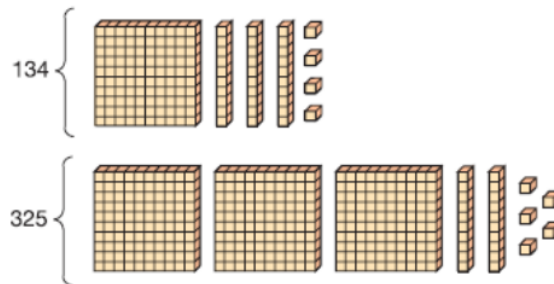
ALGORITMA UNTUK OPERASI BILANGAN CACAH

Algoritma Penjumlahan Bilangan Cacah

Algoritma merupakan prosedur atau langkah demi langkah yang sistematis yang digunakan untuk menemukan hasil penghitungan. Algoritma yang umum digunakan untuk penjumlahan adalah (1) menambahkan digit tunggal (menggunakan fakta dasar) dan (2) membawa (menyusun kembali atau menukar).

Contoh pada Gambar 4.1 menjelaskan algoritma penjumlahan $134 + 325$

Representasi dari $134 + 325$ dengan menggunakan kepingan basis 10



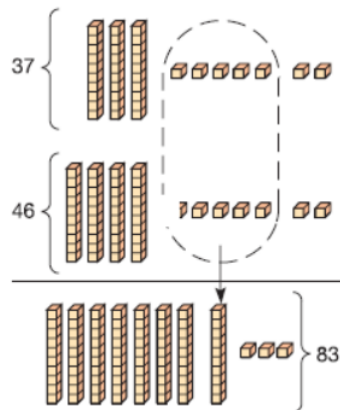
Gambar 4.1

Representasi dari $134 + 325$ Menggunakan Nilai Tempat

10^2	10	1		
1	3	4		1 3 4
+ 3	2	5		+ 3 2 5
4	5	9		4 5 9

Contoh selanjutnya adalah penjumlahan $37 + 46$

Representasi dari $37 + 46$ menggunakan kepingan basis 10.



Gambar 4.2

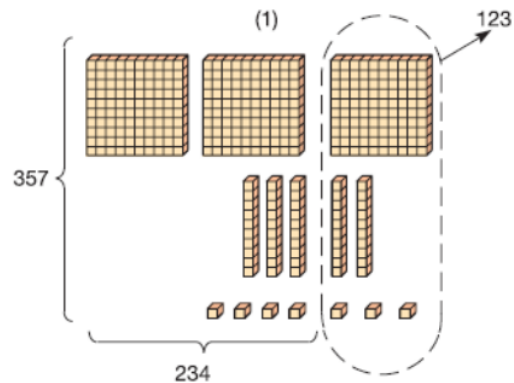
Representasi dari $37 + 46$ menggunakan nilai tempat

$$\begin{array}{r|l} 10 & 1 \\ 3 & 7 \\ + 4 & 6 \\ \hline 7 & 13 \\ 8 & 3 \end{array} \longrightarrow 10 + 3$$

Algoritma Pengurangan Bilangan Cacah

Contoh pada Gambar 4.2 berikut akan menjelaskan algoritma pengurangan $357 - 123$

Representasi dari $357 - 123$ Menggunakan Kepingan Basis 10



Gambar 4.3

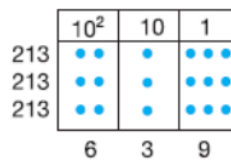
Representasi dari $357 - 123$ Menggunakan Nilai Tempat

10^2	10	1	
3	5	7	
- 1	2	3	
2	3	4	

	3	5	7
	- 1	2	3
	2	3	4

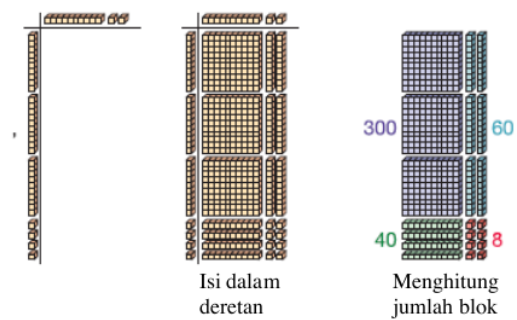
Algoritma Untuk Perkalian Bilangan Cacah

Contoh pada Gambar 4.4 berikut akan menjelaskan algoritma perkalian 3×213 dengan menggunakan model konkret



Gambar 4.4

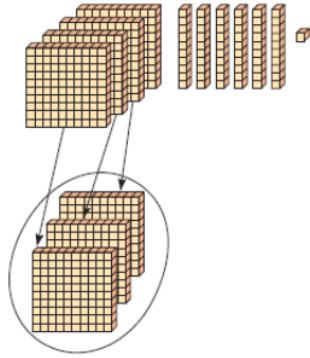
Contoh selanjutnya adalah perkalian dua digit bilangan 34×12 . Perkalian 34×12 dapat direpresentasikan pada Gambar 4.5 berikut ini.



Gambar 4.5

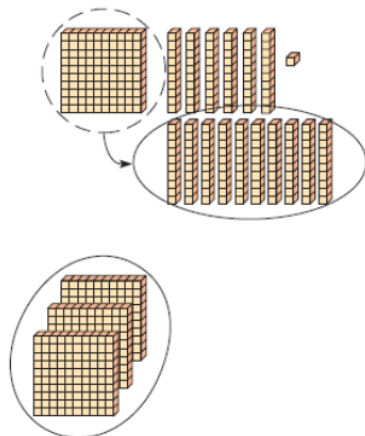
Algoritma Untuk Pembagian Bilangan Cacah

Untuk merepresentasikan $461:3$ dapat direpresentasikan dengan pembagian panjang dengan menggunakan blok puluhan.



$$\begin{array}{r} 1 \\ 3 \overline{)461} \\ \underline{3} \\ 1 \end{array}$$

Satu kelompok terdiri dari 3 flats, yang mana 100 kelompok dari 3 meninggalkan satu flat



$$\begin{array}{r} 1 \\ 3 \overline{)461} \\ \underline{3} \\ 16 \end{array}$$

LATIHAN

1. Untuk lebih mengecek sejauh mana pemahaman Anda tentang *mental math* dan estimasi, coba kerjakan latihan berikut ini.
Hitung secara mental soal berikut ini.
 - a $(37 + 25) + 43$
 - b $47.15 + 47.85$
 - c $(4 \times 13) \times 25$
 - d $26.24 - 21.24$
2. Tentukan rentang estimasi untuk perkalian berikut ini.
 - a. 37×24
 - b. 491×8
3. Estimasi soal berikut dengan menggunakan bilangan kompatibel
 - a. 84×49
 - b. 78×81
 - c. $2315 \div 59$
4. Hitung secara mental
 - a 32.000×400
 - b $4.000 \times 5.000 \times 70$
 - c $5 \times 10^4 \times 30 \times 10^5$
5. Bulatkan secara spesifik
 - a 373 ke puluhan terdekat
 - b 457 ke ratusan terdekat
 - c 3457 ke ribuan terdekat

RANGKUMAN

1. *Mental math* melibatkan penggunaan teknik-teknik khusus yang dirancang untuk jenis masalah tertentu. Dengan kemampuan *mental math* yang baik, siswa dapat menghemat waktu tanpa mengeluarkan kalkulator (atau ponsel). Keterampilan siswa dalam melakukan *mental math* akan meningkatkan kemampuannya dalam memperkirakan hasil, sehingga mereka memiliki kemampuan yang lebih baik untuk menangkap kesalahan dari hasil penghitungan kalkulator.
2. Estimasi merupakan proses menaksir atau memperkirakan jawaban saat menghitung melalui *mental math*.

3. Ada beberapa teknik dalam melakukan penghitungan estimasi yaitu metode *front-end* dan (*rounding*) pembulatan.

TES FORMATIF

Untuk memeriksa sejauh mana pemahaman Anda mengenai himpunan dan bilangan cacah, coba kerjakan masalah-masalah di bawah ini.

1. Lima dari enam bilangan berikut dibulatkan ke ribuan terdekat, kemudian dijumlahkan sehingga menghasilkan estimasi jumlah 87.000. Menurut Anda, bilangan mana yang tidak termasuk.
a. 5228 b. 14286 c. 7782 d. 19628 e. 9168 f. 39228
2. Kita tahu bahwa $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Sebagai contoh $43 \times 37 = (40 + 3)(40 - 3) = 40^2 - 3^2 = 1600 - 9 = 1591$. Selanjutnya, gunakan teknik ini untuk menemukan hasil kali secara mental soal di bawah ini
a. $54 \times 46 =$
b. $87 \times 79 =$
c. $122 \times 118 =$
3. Sisipkan tanda kurung (jika diperlukan) untuk memperoleh hasil berikut
a. $76 \times 54 + 97 = 11476$
b. $4 \times 13^2 = 2704$
c. $13 + 59^2 \times 47 = 163.620$
d. $79 - 43 \div 2 + 17^2 = 307$
4. Sisipkan tanda kurung (jika diperlukan) untuk memperoleh hasil berikut.
a. $76 \times 54 + 97 = 11476$
b. $4 \times 13^2 = 2704$
c. $13 + 59^2 \times 47 = 163.620$
d. $79 - 43 \div 2 + 17^2 = 307$
5. Beberapa penghitungan secara mental menggunakan fakta berikut:
 $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Sebagai contoh $43 \times 37 = (40 + 3)(40 - 3) = 40^2 - 3^2 = 1600 - 9 = 1591$. Aplikasikan teknik ini untuk menentukan hasil perkalian berikut secara mental.
a. 54×46
b. 81×79

c. 122×118

6. Gunakan sifat $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ untuk mengerjakan soal-soal di bawah ini. (Petunjuk: $99 = 100 - 1$)

a. 99^2

b. 999^2

c. 9999^2

7. Lengkapi hasil dari pola perkalian berikut ini

$$11 \times 11 = 121$$

$$111 \times 111 = 12321$$

$$1111 \times 1111 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$11111 \times 11111 = \underline{\hspace{2cm}}$$

8. Gunakan kalkulator untuk menghitung hasil perkalian berikut.

$$12 \times 11$$

$$24 \times 11$$

$$35 \times 11$$

Perhatikan digit tengah, digit awal, dan digit terakhirnya kemudian tulis aturan yang dapat kamu simpulkan dari perkalian 11. Sekarang kerjakan problem ini dengan menggunakan aturan yang telah Anda simpulkan dan cek kembali jawaban Anda dengan kalkulator.

$$54 \times 11$$

$$62 \times 11$$

$$36 \times 11$$

Adaptasi kembali aturan yang telah Anda buat untuk menjawab masalah berikut

$$37 \times 11$$

$$59 \times 11$$

$$76 \times 11$$

9. Tentukan pola untuk perkalian berikut.

$$24 \times 26 = 624$$

$$62 \times 68 = 4216$$

$$73 \times 77 = 5621$$

Sekarang coba temukan hasil perkalian berikut secara mental

$$41 \times 49 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$86 \times 84 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$57 \times 53 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Buktikan bahwa hasil pekerjaan Anda dapat digeneralisasi secara umum.

10. Tentukan digit terakhir dari

a. 2^{10}

b. 432^{10}

c. 3^6

d. 293^6

BAB 5

TEORI BILANGAN

Catatan tertulis menunjukkan bahwa ketika Pythagoras datang sekitar tahun 550 SM, manusia telah menggunakan bilangan terutama dalam aplikasi praktis. Manusia pada zaman Pythagoras percaya bahwa bilangan mengungkapkan struktur dasar alam semesta, jadi karena alasan inilah manusia mempelajari **pola bilangan**. Pada akhirnya bilangan inilah yang menjadikan karya penting pertama di bidang matematika, yang sekarang kita kenal sebagai teori bilangan.

Teori bilangan berguna dalam materi pecahan dan aljabar. Pemeriksaan tembus pandang yang digunakan untuk memverifikasi kode pada barang dagangan dan makanan di swalayan, nomor identifikasi tiket dan buku, sinyal dari *compact disc* dan pemancar TV, serta data dari ruang angkasa, semuanya melibatkan teori bilangan. Orang juga mempelajari teori bilangan karena sejumlah pola dapat menarik perhatian mereka, dan mereka menikmati tantangan untuk menentukan apakah pola tersebut berlaku secara umum.

Teori Bilangan adalah cabang dari ilmu matematika yang khusus mempelajari himpunan dari bilangan asli. Teori bilangan memberikan sumber yang kaya akan masalah yang menarik perhatian kita. Banyak masalah dalam teori bilangan yang mudah untuk dipahami tetapi ada beberapa yang belum terpecahkan. Kebanyakan dari masalah-masalah ini adalah pernyataan atau dugaan yang belum terbukti secara benar atau salah. Masalah yang belum terpecahkan dan yang sangat terkenal adalah Teorema Fermat yang ditemukan oleh Pierre de Fermat. Pierre de Fermat mengungkapkan bahwa “tidak ada bilangan cacah a, b , dan c bukan nol dimana $a^n + b^n = c^n$, untuk n suatu bilangan cacah lebih dari 2.

Selanjutnya, topik utama yang juga akan dikaji dalam bab 5 ini adalah bilangan prima, komposit, uji keterbagian, kelipatan persekutuan terkecil, dan faktor persekutuan terbesar.

Kompetensi Dasar:

Kompetensi dasar dalam mempelajari materi teori bilangan adalah mahasiswa mampu menerapkan konsep teori bilangan dalam menyelesaikan masalah.

Indikator

- a. Menjelaskan definisi bilangan prima
- b. Menyebutkan contoh bilangan prima
- c. Menjelaskan definisi bilangan komposit
- d. Menyebutkan contoh bilangan komposit
- e. Menjelaskan teorema tentang uji keterbagian
- f. Menjelaskan definisi Faktor Persekutuan Terbesar (FPB)
- g. Menentukan FPB dari dua bilangan
- h. Menjelaskan definisi Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK)
- i. Menentukan KPK dari dua bilangan
- j. Menerapkan konsep FPB dan KPK dalam penyelesaian masalah

Definisi

Bilangan Prima Dan Komposit

Bilangan asli yang memiliki tepat dua faktor berbeda disebut bilangan prima.

Bilangan asli yang memiliki lebih dari dua faktor disebut bilangan komposit.

2, 3, 5, 7, 11 merupakan beberapa contoh dari bilangan prima karena bilangan-bilangan tersebut memiliki dua faktor yang berbeda yaitu 1 dan bilangan itu sendiri. 4, 6, 8, 9, 10 merupakan bilangan komposit karena bilangan-bilangan tersebut memiliki lebih dari dua faktor. Satu bukan merupakan bilangan prima dan bukan bilangan komposit karena satu hanya memiliki satu faktor yaitu dirinya sendiri.

TEOREMA DASAR ARITMETIKA

Setiap bilangan komposit dapat dinyatakan sebagai perkalian prima dalam satu cara.

Nyatakan setiap bilangan berikut sebagai perkalian prima

- a. 24 b. 120 c. 225

SOLUSI

a $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$

b $120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3 \times 5$

c $225 = 3 \times 3 \times 5 \times 5 = 3^2 \times 5^2$

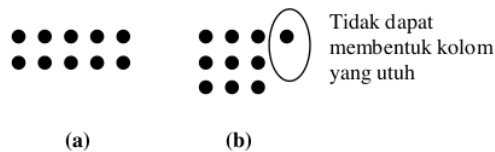
Selanjutnya kita akan mempelajari cara yang memudahkan kita untuk menentukan faktor prima. Ketika pembagian yang bersisa nol, seperti pada kasus $20 \div 4$. Kita dapat mengatakan bahwa 20 dibagi oleh 4, 4 merupakan pembagi dari 20, atau 4 membagi 20. Secara umum, kita mempunyai definisi berikut.

DEFINISI

Misalkan a dan b adalah sebarang bilangan cacah dimana $a \neq 0$. Kita katakan a membagi b dan kita tulis $a|b$, jika dan hanya jika ada bilangan cacah x sedemikian sehingga $ax = b$. Dan simbol $a \nmid b$ artinya a tidak membagi b .

Dengan kata lain, a membagi b jika dan hanya jika a faktor dari b . Ketika a membagi b kita juga dapat mengatakan a adalah pembagi dari b , a adalah faktor dari b , b adalah kelipatan dari a , dan b dapat dibagi oleh a .

Kita dapat juga mengatakan bahwa $a|b$ jika b objek dapat disusun dalam deretan persegi panjang dengan a baris. Sebagai contoh $2|10$ karena 10 titik dapat ditempatkan dalam persegipanjang dengan 2 baris, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 5.1 (a). Di sisi yang lain $3 \nmid 10$ karena jika 10 titik ditempatkan dalam suatu deretan dengan 3 baris maka tidak akan membentuk persegipanjang.



Gambar 5.1

CONTOH

Tentukan apakah pernyataan berikut benar atau salah.

- | | |
|--------------------------------|--|
| a. $3 15$ | b. 5 adalah pembagi dari 90 |
| c. 256 adalah kelipatan dari 4 | d. 52 dapat dibagi oleh 18 |
| e. 9 membagi 34 | f. $(2^2 \cdot 3) (2^3 \cdot 3^2 \cdot 5)$ |

SOLUSI

- a. Benar $3|15$, karena $3 \cdot 5 = 15$
- b. Benar 5 adalah pembagi dari 90 karena $5 \cdot 18 = 90$
- c. Benar 256 adalah kelipatan dari 4 karena $4 \cdot 64 = 256$
- d. Salah, karena tidak ada bilangan cacah x sedemikian sehingga $18 \cdot x = 52$
- e. Salah, $9 \nmid 34$ karena tidak ada bilangan cacah x sedemikian sehingga $9 \cdot x = 34$
- f. Benar $(2^2 \cdot 3)|(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5)$ karena $(2^2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5) = (2^3 \cdot 3^2 \cdot 5)$

Beberapa uji sederhana dapat digunakan untuk membantu menentukan faktor dari suatu bilangan. Sebagai contoh, apakah bilangan 27, 45, 38, 70, 111, dan 110

Pendidikan Matematika Sekolah Dasar

dapat dibagi oleh 2, 5, atau 10? Jika Anda menjawabnya dengan melihat salah satu digit, berarti Anda menerapkan uji keterbagian. Uji keterbagian oleh 2, 5, dan 10 akan dijelaskan sebagai berikut.

UJI PEMBAGIAN OLEH 2, 5, dan 10

- Sebuah bilangan dapat dibagi oleh 2 jika dan hanya jika digit terakhirnya adalah 0, 2, 4, 6 atau 8
- Sebuah bilangan dapat dibagi oleh 5 jika dan hanya jika salah satu digit terakhirnya adalah 0 atau 5
- Sebuah bilangan dapat dibagi oleh 10 jika dan hanya jika digit terakhirnya adalah 0

TEOREMA

Misalkan a, m, n dan k adalah bilangan cacah dimana $a \neq 0$

- Jika $a|m$ dan $a|n$ maka $a|(m + n)$
- Jika $a|m$ dan $a|n$ maka $a|(m - n)$, untuk $m \geq n$
- Jika $a|m$, maka $a|km$

PEMBUKTIAN

- a. Jika $a|m$ maka $ax = m$ untuk suatu bilangan cacah x .

Jika $a|n$ maka $ay = n$ untuk suatu bilangan cacah y

Jika kita menjumlahkan kedua persamaan $ax = m$ dan $ay = n$ maka akan kita peroleh $a(x + y) = m + n$. Perhatikan kembali bahwa a, x , dan y merupakan bilangan cacah, sehingga $(x + y)$ juga merupakan suatu bilangan cacah, sehingga persamaan $a(x + y) = m + n$ mengimplikasikan $a|(m + n)$.

- b. Jika $a|m$ maka $ax = m$ untuk suatu bilangan cacah x .

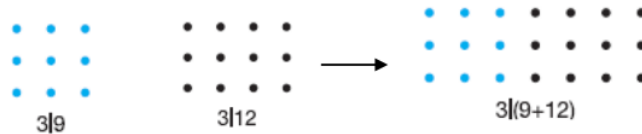
Jika $a|n$ maka $ay = n$ untuk suatu bilangan cacah y

Jika kita mengurangkan kedua persamaan $ax = m$ dan $ay = n$ maka akan kita peroleh $a(x - y) = m - n$. Karena $(x - y)$ adalah suatu bilangan cacah, persamaan $a(x - y) = m - n$ mengimplikasikan $a|(m - n)$.

- c. Jika $a|m$ maka $ax = m$ untuk suatu bilangan cacah x . Jika kita mengalikan dengan suatu bilangan cacah k untuk masing-masing ruas pada persamaan $ax = m$ maka akan kita peroleh persamaan $axk = mk$. Perhatikan bahwa x dan k

merupakan suatu bilangan cacah xk adalah suatu bilangan cacah, sehingga persamaan $axk = mk$ mengimplikasikan $a|km$

Teorema pada poin (a) juga dapat diilustrasikan dengan “deretan persegi panjang” yang mendeskripsikan pembagian. Pada gambar 5.1, $3|9$ direpresentasikan oleh persegi panjang dengan 3 barisan titik-titik dimana setiap barisnya ada 3 buah titik berwarna biru. $3|12$ direpresentasikan oleh persegi panjang yang tersusun dari 3 barisan titik-titik dimana setiap barisnya ada 4 buah titik yang berwarna hitam. Dengan menempatkan 9 titik berwarna biru dan 12 titik berwarna hitam secara bersama-sama maka ada $(9 + 12)$ titik yang tersusun dalam 3 baris, sehingga $3|(9 + 12)$



Gambar 5.2

UJI PEMBAGIAN OLEH 4 DAN 8

Suatu bilangan dapat dibagi oleh 4 jika dan hanya jika dua digit terakhir dari bilangan tersebut dapat dibagi oleh 4

Suatu bilangan dapat dibagi oleh 8 jika dan hanya jika tiga digit terakhir dari bilangan tersebut dapat dibagi oleh 8

CONTOH

Tentukan apakah pernyataan berikut ini benar atau salah

- a. $4|1432$ b. $8|4204$
- c. $4|2.345.678$ d. $8|98.765.432$

SOLUSI

- 1. Benar, $4|1432$, karena $4|32$
- 2. Salah, $8 \nmid 4204$, karena $8 \nmid 204$
- 3. Salah, $4 \nmid 2345678$, karena $4 \nmid 78$
- 4. Benar, $8|98.765.432$, karena $8|432$

2

Pendidikan Matematika Sekolah Dasar

UJI PEMBAGIAN OLEH 3 DAN 9

- a) Suatu bilangan dapat dibagi oleh 3 jika dan hanya jika jumlah digit-digitnya dapat dibagi 3
- b) Suatu bilangan dapat dibagi oleh 9 jika dan hanya jika jumlah digit-digitnya dapat dibagi 9

CONTOH

4

Tentukan apakah pernyataan berikut benar atau salah.

- a. $3|12345$ b. $9|12345$ c. $9|6543$

SOLUSI

- a) Benar, $3|12345$ karena $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ dan $3|15$
- b) Salah, $9 \nmid 12345$ karena $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ dan $9 \nmid 15$
- c) Benar, $9|6543$ karena $9|6 + 5 + 4 + 3$

7

UJI PEMBAGIAN OLEH 6

Suatu bilangan dapat dibagi oleh 6 jika dan hanya jika uji pembagian ¹2 dan 3 dipenuhi.

UJI PEMBAGIAN OLEH 11

Suatu bilangan dapat dibagi 11 jika dan hanya jika 11 membagi selisih dari jumlah digit-digit yang nilai tempatnya berpangkat ganjil dan jumlah digit-digit yang nilai tempatnya berpangkat genap.

CONTOH

Tentukan pernyataan berikut benar atau salah. Jelaskan

- a. $11|5346$ b. $11|909381$ c. $11|76543$

SOLUSI

- a Benar, $11|5346$ karena $5 + 4 = 9$, $3 + 6 = 9$, $9 - 9 = 0$, dan $11|0$
- b Benar, $11|909381$ karena $9 + 9 + 8 = 26$, $0 + 3 + 1 = 4$, $26 - 4 = 22$ dan $11|22$
- c Salah, $11 \nmid 76543$ karena $7 + 5 + 3 = 15$, $6 + 4 = 10$, $15 - 10 = 5$ dan $11 \nmid 5$

FAKTOR

Pada sub bab ini kita akan membahas mengenai faktor. Pada suatu kasus selain diminta untuk menemukan faktor prima dari suatu bilangan, terkadang kita juga menemui permasalahan terkait dengan berapa banyak faktor yang dimiliki oleh suatu bilangan. Untuk menjawab permasalahan terkait menemukan faktor prima dan menentukan berapa banyak faktor prima dari suatu bilangan, teorema dasar aritmetika akan sangat membantu dalam hal ini. Sebagai contoh untuk menemukan semua faktor dari 12, terlebih dahulu perlu Anda pertimbangkan kembali bahwa faktorisasi prima dari 12 adalah $2^2 \cdot 3^1$. Selanjutnya untuk menemukan semua faktor dari 12 dapat dilihat dari tabel 5.1 berikut.

Eksponen dari 2	Eksponen dari 3	Faktor
0	0	$2^0 \cdot 3^0 = 1$
0	1	$2^0 \cdot 3^1 = 3$
1	0	$2^1 \cdot 3^0 = 2$
1	1	$2^1 \cdot 3^1 = 6$
2	0	$2^2 \cdot 3^0 = 4$
2	1	$2^2 \cdot 3^1 = 12$

Jadi berdasarkan tabel 5.1, kita dapat menentukan semua faktor dari 12 adalah 1,2,3,4,6,12. Teknik yang digunakan pada tabel 5.1 berlaku untuk sebarang bilangan cacah yang diekspresikan sebagai perkalian prima dengan eksponennya masing-masing. Untuk menentukan banyaknya faktor dari $2^3 \cdot 5^2$ dapat dibangun dari teknik yang digunakan pada tabel 5.1. Eksponen dari 2 berkisar dari 0 sampai 3 (ada 4 kemungkinan) dan eksponen 5 berkisar dari 0 sampai 2 (ada 3 kemungkinan) sehingga akan ada 12 kombinasi atau 12 faktor dari $2^3 \cdot 5^2$ seperti yang telah ditunjukkan pada tabel berikut.

$\begin{matrix} 2 \\ \backslash \\ 5 \end{matrix}$	0	1	2
0	$2^0 \cdot 5^0 = 1$	$2^0 \cdot 5^1 = 5$	$2^0 \cdot 5^2 = 25$
1	$2^1 \cdot 5^0 = 2$	$2^1 \cdot 5^1 = 10$	$2^1 \cdot 5^2 = 50$
2	$2^2 \cdot 5^0 = 4$	$2^2 \cdot 5^1 = 20$	$2^2 \cdot 5^2 = 100$
3	$2^3 \cdot 5^0 = 8$	$2^3 \cdot 5^1 = 40$	$2^3 \cdot 5^2 = 200$

Pendidikan Matematika Sekolah Dasar

Teknik atau metode untuk menentukan banyaknya faktor dari sebarang bilangan dapat diringkas sebagai berikut.

TEOREMA

Anggap bahwa bilangan asli n diekspresikan sebagai perkalian dari prima-prima yang berbeda dengan eksponennya masing-masing, katakan $n = (p_1^{n_1})(p_2^{n_2}) \dots (p_m^{n_m})$, maka banyaknya faktor dari n adalah hasil perkalian dari $(n_1 + 1) \cdot (n_2 + 1) \dots (n_m + 1)$

CONTOH

Tentukan banyaknya faktor dari

- a. 225 b. $2^2 \times 3^3 \times 5^2$ c. $9^2 \times 7^3 \times 11^4$

SOLUSI

- a. $225 = 3^2 \times 5^2$, sehingga banyak faktor dari 225 adalah $(2 + 1)(2 + 1) = 9$

Jadi banyaknya faktor dari 225 adalah 9

- b. $2^2 \times 3^3 \times 5^2$ mempunyai $(2 + 1)(3 + 1)(2 + 1) = 36$ faktor

Jadi banyaknya faktor dari $2^2 \times 3^3 \times 5^2$ adalah 36

- c. $9^2 \times 7^3 \times 11^4$ mempunyai $(4 + 1)(3 + 1)(4 + 1) = 100$ faktor (catatan: 9^2 ditulis kembali menjadi 3^4 karena 9 bukan prima)

Jadi banyaknya faktor dari $9^2 \times 7^3 \times 11^4$ adalah 100

Perlu diperhatikan, berdasarkan teorema dan contoh-contoh di atas banyak faktor dari suatu bilangan tidak bergantung pada faktor-faktor prima, tetapi bergantung pada eksponennya masing-masing.

FAKTOR PERSEKUTUAN TERBESAR

Faktor Persekutuan Terbesar (FPB) dari dua atau lebih bilangan cacah tak nol adalah bilangan cacah terbesar yang merupakan faktor dari kedua (kesemua) bilangan tersebut. FPB dari a dan b ditulis $\text{FPB}(a, b)$.

Konsep FPB ini sangat berguna ketika kita akan menyederhanakan pecahan. Pada dasarnya ada dua cara untuk menemukan FPB dari dua bilangan yaitu dengan menggunakan metode irisan himpunan dan metode faktorisasi prima. Sebagai

contoh untuk menentukan FPB (60,140) dengan menggunakan metode irisan himpunan dan faktorisasi prima perhatikan langkah-langkah berikut ini.

1. Metode Irisan Himpunan

Langkah 1 Temukan semua faktor dari 60 dan 140

Faktorisasi prima dari 60 adalah $2^2 \times 3 \times 5$ sehingga ada $3 \times 2 \times 2 = 12$ faktor dan faktorisasi prima dari 140 adalah $2^2 \times 5 \times 7$ sehingga ada $3 \times 2 \times 2 = 12$ faktor. Himpunan dari faktor-faktor 60 adalah {1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60} dan himpunan dari faktor-faktor dari 140 adalah {1, 2, 4, 5, 7, 10, 14, 20, 28, 35, 70, 140}

Langkah 2

Temukan semua faktor-faktor sekutu dari 60 dan 140 dengan mencari irisan dari dua himpunan pada langkah 1.

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\} \cap \{1, 2, 4, 5, 7, 10, 14, 20, 28, 35, 70, 140\} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$$

Langkah 3

Temukan bilangan terbesar pada himpunan faktor persekutuan pada langkah 2. Bilangan terbesar pada {1, 2, 4, 5, 10, 20} adalah 20. Oleh karena itu, 20 merupakan Faktor Persekutuan Terbesar dari 60 dan 140. (Catatan: metode irisan himpunan dapat juga digunakan untuk menemukan FPB lebih dari dua bilangan dengan metode yang serupa)

Dari segi langkah-langkah, metode irisan himpunan merupakan metode yang rumit dan dilihat dari segi waktu, metode ini kurang efisien akan tetapi secara konseptual metode irisan himpunan merupakan cara yang natural untuk menentukan faktor persekutuan terbesar. Istilah “persekutuan” dari faktor persekutuan terbesar dapat dicari dengan menggunakan metode irisan himpunan. Metode kedua yaitu faktorisasi prima dikenal sebagai metode yang lebih efisien dibandingkan metode irisan himpunan

2. Metode Faktorisasi Prima

Langkah 1

Nyatakan bilangan 60 dan 140 dalam faktorisasi prima.

$$60 = 2 \times 2 \times 5 \times 3$$

$$140 = 2 \times 2 \times 5 \times 7$$

Catatan: 2, 2, dan 5 merupakan bilangan yang terdaftar di kedua faktorisasi prima dari 60 dan 140.

- 2 merupakan faktor sekutu dari 60 dan 140
- 2×2 merupakan faktor sekutu dari 60 dan 140
- 5 merupakan faktor sekutu dari 60 dan 140
- 2×5 merupakan faktor sekutu dari 60 dan 140
- $2 \times 2 \times 5$ merupakan faktor sekutu dari 60 dan 140, akan tetapi ingat bahwa dalam kasus ini yang kita cari adalah faktor persekutuan terbesar

Langkah 2

Tentukan semua faktor persekutuan prima yang terbesar dari 60 dan 140, kemudian kalikan.

Faktor persekutuan prima yang terbesar dari 60 dan 140 adalah $2 \times 2 \times 5$. Sehingga FPB dari 60 dan 140 adalah 20.

Metode irisan himpunan memang merupakan metode yang kurang abstrak dibandingkan dengan metode faktorisasi prima sehingga siswa akan lebih mudah memahami cara kerjanya. Atas dasar alasan inilah mengapa metode irisan himpunan lebih sering digunakan siswa sekolah dasar. Meskipun demikian, kedua metode ini (irisan himpunan dan faktorisasi prima) bekerja dengan baik untuk bilangan yang kecil. Selanjutnya untuk bilangan besar yang memiliki banyak faktor akan lebih efektif jika menggunakan metode faktorisasi prima.

Di awal bab 5 ini, kita telah membahas bahwa jika $a|m$, $a|n$, dan $m \geq n$, maka $a|(m - n)$. Dengan kata lain, jika suatu bilangan membagi dua bilangan yang berbeda, maka bilangan tersebut akan membagi selisihnya. Oleh karena itu, jika c adalah faktor sekutu dari a dan b , dimana $a \geq b$, maka c juga membagi faktor sekutu dari b dan $a - b$. Perlu diperhatikan bahwa setiap faktor sekutu dari a dan b juga merupakan faktor sekutu dari b dan $a - b$ atau jika ditulis dalam

bentuk pasangan $(a - b)$ dan $(a - b, b)$ mempunyai faktor sekutu yang sama. Sehingga FPB (a, b) dan FPB $(a - b, b)$ pasti juga sama.

1 TEOREMA

Jika a dan b adalah bilangan cacah, dengan $a \geq b$, maka

$$FPB(a, b) = FPB(a - b, b)$$

Penerapan dari teorema ini akan dijelaskan melalui contoh berikut.

Contoh

Tentukan FPB (484, 363)

Solusi

$$\begin{aligned} FPB(484, 363) &= FPB(484 - 363, 363) \\ &= FPB(121, 363) \\ &= FPB(121, 242) \\ &= FPB(484, 121) \\ &= FPB(121, 121) \\ &= 121 \end{aligned}$$

Jadi FPB dari 484 dan 363 adalah 121

Selanjutnya untuk menentukan FPB dari bilangan-bilangan yang sangat besar dengan kasus yang khusus. Seperti misalnya menentukan FPB dari 1173 dan 374, 1173 harus dikurangkan berkali-kali untuk menghasilkan bilangan yang kurang dari (atau sama dengan) 374. Perlu diperhatikan bahwa pembagian dapat dipandang sebagai pengurangan berulang sehingga pembagian panjang dapat digunakan untuk mempersingkat proses ini, seperti dapat kita lihat pada langkah berikut.

$$FPB(1173, 374) \rightarrow \begin{array}{r} 3 \\ 374 \overline{) 1173} \\ \underline{1122} \\ 51 \end{array}$$

$$FPB(374, 51) \rightarrow \begin{array}{r} 7 \\ 51 \overline{) 374} \\ \underline{357} \\ 17 \end{array}$$

$$FPB(51, 17) \rightarrow \begin{array}{r} 3 \\ 17 \overline{) 51} \\ \underline{51} \\ 0 \end{array}$$

Oleh karena itu $FPB(1173, 374) = FPB(51, 17) = 17$. Setiap langkah pada metode ini dapat dijustifikasi oleh teorema berikut.

1

TEOREMA

Jika a dan b adalah bilangan cacah dengan $a \geq b$ dan $a = bq + r$, dimana $r < b$, maka

$$FPB(A, B) = FPB(r, b)$$

Oleh karena itu untuk menemukan FPB dari sebarang dua bilangan, teorema ini dapat diaplikasikan secara berulang sampai bersisa nol. Pembagi akhir yang mengarah ke sisa nol adalah FPB dari dua bilangan tersebut. Metode ini lebih dikenal dengan Euclidean algorithm.

KELIPATAN PERSEKUTUAN TERKECIL

Kelipatan Persekutuan Terkecil berguna saat kita menjumlahkan atau mengurangi pecahan.

DEFINISI**Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK)**

Kelipatan persekutuan terkecil (KPK) dari dua bilangan atau lebih bilangan cacah yang bukan nol adalah bilangan cacah terkecil bukan nol yang merupakan kelipatan dari masing-masing atau semua bilangan. KPK dari a dan b ditulis $KPK(a, b)$.

Seperti yang baru kita bahas sebelumnya bahwa ada dua cara untuk menentukan FPB sedangkan untuk menentukan KPK ini ada dua cara yaitu metode irisan himpunan dan metode faktorisasi prima.

Misalkan untuk menentukan KPK dari 4 dan 10 kita dapat menerapkan tiga metode tersebut.

Metode Irisan Himpunan

Langkah 1: Daftar kelipatan dari 4 dan 10

Himpunan kelipatan dari 4 adalah $\{4,8,12,16,20,24,28,32,36,40, \dots\}$ dan himpunan kelipatan dari 10 adalah $\{10,20,30,40,50,60, \dots\}$

Langkah 2: Tentukan kelipatan persekutuan dari 4 dan 10

Untuk mencari kelipatan persekutuan dari 4 dan 10 adalah dengan melakukan irisan dari dua himpunan kelipatan 4 dan kelipatan 10. $\{4,8,12,16,20,24,28,32,36,40, \dots\} \cap \{10,20,30,40,50,60, \dots\} = \{20,40\}$

Langkah 3: Tentukan bilangan terkecil pada himpunan kelipatan persekutuan pada langkah 2.

Bilangan terkecil dalam himpunan kelipatan persekutuan $\{20,40\}$ adalah 20, sehingga KPK dari 4 dan 10 adalah 20

Metode Faktorisasi Prima

Langkah 1: Nyatakan bilangan 4 dan 10 dalam faktorisasi prima

$$4 = 2 \times 2 = 2^2$$

$$10 = 2 \times 5$$

Langkah 2:

Daftar bilangan-bilangan prima yang muncul pada faktorisasi 4 atau 10 dan kemudian kalikan bilangan-bilangan prima tersebut (dalam kasus ini bilangan prima yang muncul adalah 2 dan 5)

KPK dari 4 dan 10 nantinya dapat dibentuk dalam faktorisasi prima berpangkat $2^r \times 5$, dimana r adalah eksponen atau pangkat yang terbesar dari 2 dan s merupakan eksponen terbesar dari 5. Jika kita lihat faktorisasi prima pada langkah 1 yaitu $4 = 2^2$ dan $10 = 2 \times 5$, maka r dapat disubstitusi dengan 2 dan s dapat disubstitusi dengan 1 (dalam kasus ini pangkat tertinggi dari 2 adalah 2 dan pangkat tertinggi dari 5 adalah 1). Sehingga KPK dari 4 dan 10 adalah $2^2 \times 5^1 = 20$. Mungkin Anda bertanya-tanya mengapa KPK dari 4 dan 10 dapat dibentuk dalam faktorisasi prima berpangkat $2^2 \times 5$ dan kenapa harus dicari pangkat tertingginya? Alasannya karena $2^2 \times 5$ memuat 2^2 dan juga memuat 2×5 . Dengan kata lain $2^2 \times 5$ merupakan kelipatan dari 4 dan 10

Pendidikan Matematika Sekolah Dasar

Metode irisan himpunan merupakan metode yang kurang abstrak sehingga siswa lebih mudah memahami mengapa tahapan-tahapan dalam metode irisan himpunan berlaku. Berdasarkan alasan ini, metode irisan himpunan mudah untuk diajarkan pada siswa SD. Selanjutnya untuk metode kedua yaitu metode faktorisasi prima lebih efektif jika digunakan untuk menentukan KPK dari bilangan yang relatif besar.

Perluasan Konsep dari KPK dan FPB

Hubungan antara KPK dan FPB dituliskan dalam teorema berikut.

TEOREMA

Misalkan a dan b adalah sebarang dari dua **bilangan cacah**. Maka

$$FPB(a, b) \times KPK(a, b) = ab$$

Akibat dari teorema ini juga berlaku bahwa $KPK(a, b) = \frac{ab}{FPB(a, b)}$ sehingga jika

FPB dari dua bilangan diketahui maka KPK dari dua bilangan tersebut juga dapat ditemukan.

Contoh

Tentukan KPK dari 36 dan 42

Solusi

Tentukan terlebih dahulu FPB dari 36 dan 42

$$36 = 2^2 \times 3^2$$

$$42 = 2 \times 3 \times 7$$

$$FPB = 2 \times 3 = 6$$

Berdasarkan teorema maka untuk mencari KPK dari 36 dan 42 adalah $\frac{36 \times 42}{6} = 252$.

LATIHAN

1. Tentukan pernyataan berikut benar atau salah. Jika salah, jelaskan

- a $3|9$
- b 6 adalah faktor dari 3
- c 48 adalah kelipatan dari 16
- d 3 adalah pembagi dari 21

Pendidikan Matematika Sekolah Dasar

2. Tentukan faktorisasi prima dari
a. 216 b. 825 c. 2940
3. Bilangan mana yang merupakan kelipatan dari 3? 4? 9?
a. 123.452 b. 1.114.500
4. Gunakan uji keterbagian 11 untuk menentukan bilangan mana yang dapat dibagi oleh 11?
a. 2.838 b. 71.992 c. 172.425
5. Bilangan mana yang merupakan komposit? Mengapa?
a. 12 b. 123 c. 1234 d. 12.345
6. Tentukan FPB dari pasangan bilangan berikut.
a. FPB dari 12 dan 18
b. FPB dari 36 dan 42
c. FPB dari 60 dan 84
7. Tentukan KPK dari pasangan bilangan berikut
a. KPK dari 15 dan 21
b. KPK dari 36 dan 45
c. KPK dari 125 dan 225

RANGKUMAN

1. Bilangan asli yang memiliki tepat dua faktor berbeda disebut bilangan prima.
2. Bilangan asli yang memiliki lebih dari dua faktor disebut bilangan komposit.
3. 2, 3, 5, 7, 11 merupakan beberapa contoh dari bilangan prima karena bilangan-bilangan tersebut memiliki dua faktor yang berbeda yaitu 1 dan bilangan itu sendiri. 4, 6, 8, 9, 10 merupakan bilangan komposit karena bilangan-bilangan tersebut memiliki lebih dari dua faktor.
4. Setiap bilangan komposit dapat dinyatakan sebagai perkalian prima dalam satu cara.
5. Misalkan a dan b adalah sebarang bilangan cacah dimana $a \neq 0$. Kita katakan a membagi b dan kita tulis $a|b$, jika dan hanya jika ada bilangan cacah x sedemikian sehingga $ax = b$.
6. Suatu bilangan dapat dibagi oleh 2 jika dan hanya jika digit terakhirnya adalah 0, 2, 4, 6 atau 8

Pendidikan Matematika Sekolah Dasar

7. Suatu bilangan dapat dibagi oleh 5 jika dan hanya jika salah satu digit terakhirnya adalah 0 atau 5
8. Suatu bilangan dapat dibagi oleh 10 jika dan hanya jika digit terakhirnya adalah 0
9. Suatu bilangan dapat dibagi oleh 4 jika dan hanya jika dua digit terakhir dari bilangan tersebut dapat dibagi oleh 4
10. Suatu bilangan dapat dibagi oleh 8 jika dan hanya jika dua digit terakhir dari bilangan tersebut dapat dibagi oleh 8
11. Suatu bilangan dapat dibagi oleh 3 jika dan hanya jika jumlah digit-digitnya dapat dibagi 3
12. Suatu bilangan dapat dibagi oleh 9 jika dan hanya jika jumlah digit-digitnya dapat dibagi 9
13. Suatu bilangan dapat dibagi oleh 6 jika dan hanya jika uji pembagian 2 dan 3 dipenuhi.
14. Suatu bilangan dapat dibagi 11 jika dan hanya jika 11 membagi selisih dari jumlah digit-digit yang nilai tempatnya berpangkat ganjil dan jumlah digit-digit yang nilai tempatnya berpangkat genap.
15. Faktor Persekutuan Terbesar (FPB) dari dua atau lebih bilangan cacah tak nol adalah bilangan cacah terbesar yang merupakan faktor dari kedua (lebih) bilangan tersebut. FPB dari a dan b ditulis $FPB(a, b)$.
16. Kelipatan persekutuan terkecil (KPK) dari dua bilangan atau lebih bilangan cacah yang bukan nol adalah bilangan cacah terkecil bukan nol yang merupakan kelipatan dari masing-masing atau semua bilangan. KPK dari a dan b ditulis $KPK(a, b)$.

TES FORMATIF

Untuk memeriksa sejauh mana pemahaman Anda mengenai himpunan dan bilangan cacah, coba kerjakan masalah-masalah di bawah ini.

1. Aku adalah 2 digit bilangan yang kurang dari 40. Aku hanya dapat dibagi oleh satu bilangan prima. Jumlah digit-digitku adalah prima, dan selisih antara digit-digitku adalah prima yang lain. Bilangan berapakah aku?

Pendidikan Matematika Sekolah Dasar

2. Ada salah satu bilangan komposit dalam himpunan 331, 3331, 33,331, 333,331, 3,333,331, 33,333,331, 333, 333,331. Manakah salah satu bilangan tersebut yang merupakan bilangan komposit? (petunjuk: bilangan tersebut mempunyai faktor kurang dari 30)
3. Dua dan tiga merupakan bilangan cacah prima berurutan. Apakah ada pasangan bilangan prima berurutan yang lain? Justifikasi jawaban Anda.
4. Ada tiga digit bilangan dengan sifat sebagai berikut. Jika Anda mengurangkan 7 dari bilangan tersebut, maka selisihnya adalah 7, jika Anda mengurangkan 8 dari bilangan itu maka selisihnya dapat dibagi oleh 8, dan jika Anda mengurangkan 9 dari bilangan itu, maka selisihnya dapat dibagi oleh 9. Bilangan berapakah yang dimaksud?
5. Tentukan bilangan terkecil yang mempunyai faktor 2,3,4,5,6,7,8,9, dan 10?
6. Diketahui bahwa $a \cdot b = 270$ dan FPB dari a dan b adalah 3. Tentukan KPK dari a dan b .
7. Identifikasi semua bilangan antara 1 dan 20 yang mempunyai suatu pembagi bilangan ganjil. Bagaimana hubungan dari bilangan-bilangan ini
8. Tentukan dua pasang bilangan a dan b sedemikian sehingga FPB dari a dan b adalah 15 dan KPK dari a dan b adalah 180.
9. Angka 1, 7, 13, 31, 37, 43, 61, 67, dan 73 membentuk persegi magis penjumlahan 3×3 . (Suatu persegi magis penjumlahan memiliki jumlah yang sama di ketiga baris, tiga kolom, dan dua diagonal utama.) Gambarkan persegi magis tersebut.
10. Teori bioritme menyatakan bahwa ada tiga "siklus" untuk hidup Anda:
Siklus fisik: 23 hari
Siklus emosional: 28 hari
Siklus intelektual: 33 hari
Jika siklus Anda bersama satu hari, berapa hari lagi mereka akan bersama lagi?

BAB 6

PECAHAN

Kata pecahan berasal dari kata Latin yaitu "*fractus*" yang artinya memecah. Istilah pembilang berasal dari kata Latin yaitu *numerare* yang artinya membilang atau menghitung dan kata penyebut berasal dari kata Latin yaitu *nomen* yang artinya nama. Oleh karena itu untuk pecahan dua pertiga ($\frac{2}{3}$), dimana penyebut menjelaskan kepada pembaca nama dari objek (disebut pecahan sepertiga) dan pembilang menjelaskan tentang banyaknya objek (ada dua).

Pecahan secara luas diperkenalkan kepada kita oleh Rhind Papyrus (1600 SM) yang memuat karya ahli matematika Mesir. Orang Mesir mengekspresikan pecahan sebagai pecahan satuan (pecahan yang pembilangnya adalah 1). Oleh karena itu jika mereka ingin mendeskripsikan berapa banyak bagian ikan yang didapatkan oleh setiap orang jika ada 5 ikan untuk 8 orang. Melalui kasus ini, bagian yang didapatkan oleh setiap orang tidak akan ditulis sebagai $\frac{5}{8}$, akan tetapi mereka akan menuliskan sebagai $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$. Tentunya, orang mesir menggunakan tulisan hieroglif untuk merepresentasikan pecahan satuan seperti berikut ini.

$$\frac{1}{5} = \text{hieroglif 1/5}$$

$$\frac{1}{10} = \text{hieroglif 1/10}$$

$$\frac{1}{21} = \text{hieroglif 1/21}$$

Orang Mesir Kuno menggunakan pecahan dalam kegiatan jual beli di pasar untuk menentukan nilai tukar barang, jauh sebelum bilangan negatif ditemukan. Orang-orang Babilonia dan Mesir menggunakan pecahan lebih dari 3.500 tahun yang lalu dalam bidang pertanian dan bisnis. Pada abad ke 7, matematikawan hindu menggunakan pecahan serupa dengan yang kita gunakan saat ini. Mereka menulis satu bilangan di atas bilangan yang lain, tetapi mereka tidak mencantumkan garis horisontal di antara bilangan-bilangan tersebut, dan metode ini diadopsi oleh orang-orang Eropa pada abad ke 10. Pada abad ke 12 matematikawan Arab menyisipkan garis horisontal diantara pembilang dan penyebut.

Guru-guru mengikuti sejarah ini ketika mereka mengajarkan pecahan sebelum bab bilangan bulat di sekolah dasar. Aplikasi praktis yang mengarah pada perkembangan pecahan mencakup masalah membagi (sebagai contoh membagi satu buah semangka kepada 10 orang) dan yang terkait dengan masalah pengukuran (sebagai contoh $12\frac{1}{2}$ m).

Kompetensi Dasar:

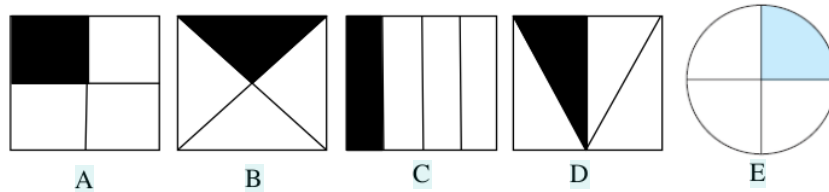
Kompetensi dasar dalam mempelajari materi pecahan adalah mahasiswa mampu menerapkan konsep peahan dalam menyelesaikan masalah.

Indikator

- a. Menjelaskan pengertian pecahan
- b. Menjelaskan pengertian pecahan senilai
- c. Mencontohkan pecahan senilai
- d. Mencontohkan jenis-jenis operasi pada pecahan
- e. Mengidentifikasi sifat-sifat penjumlahan pecahan
- f. Mengidentifikasi sifat-sifat perkalian pecahan
- g. Mengurutkan pecahan yang berbeda
- h. Menerapkan konsep pecahan dalam penyelesaian masalah

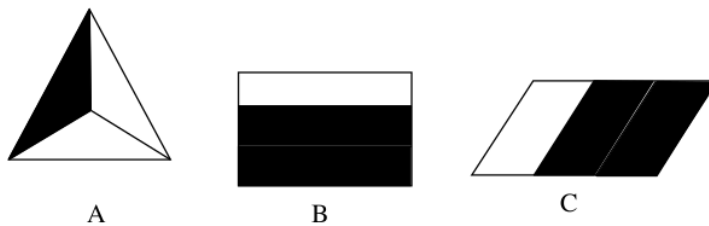
KONSEP PECAHAN

Pada awalnya pecahan digunakan untuk merepresentasikan bagian dari keseluruhan. Pecahan disimbolkan dengan $\frac{a}{b}$ yang merepresentasikan a bagian dari b bagian yang sama. Untuk lebih memahami konsep pecahan perhatikan gambar berikut.



Gambar 6.1

$\frac{1}{4}$ ditunjukkan dengan satu bagian dari empat bagian yang sama

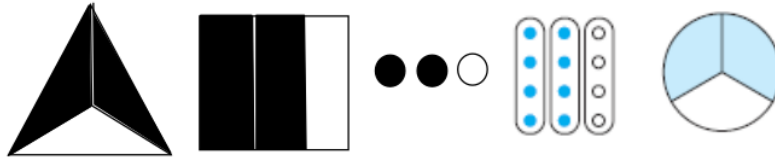


Gambar 6.2

$\frac{2}{3}$ ditunjukkan dengan dua bagian dari tiga bagian yang sama

Secara konseptual, suatu pecahan disimbolkan $\frac{a}{b}$, dimana a dan b adalah bilangan cacah dan $b \neq 0$. a disebut sebagai pembilang dan b disebut sebagai penyebut. Mengapa kita menggunakan istilah "pembilang" dan "penyebut"? Nah, seperti yang telah dijelaskan pada bagian pendahuluan, anggap saja kita memotong sebuah semangka menjadi 8 bagian yang sama. Ukuran penyajian dinyatakan dalam delapan satuan atau kita kenal dengan istilah nama dari objek (dalam kasus ini maksudnya adalah seperdelapan). Banyak potongan yang seseorang makan menentukan pembilangnya, dalam kasus ini yaitu sebanyak 3 potong. Jika Anda makan 3 potong dari 8 potong semangka yang ada, maka Anda sudah makan $\frac{3}{8}$ semangka itu.

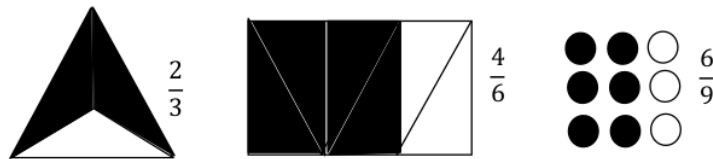
Perlu diketahui bahwa pecahan juga memiliki makna yang abstrak sama halnya dengan bilangan. Coba sekarang apa yang Anda pikirkan ketika melihat daerah yang diarsir pada Gambar 6.3



Gambar 6.3

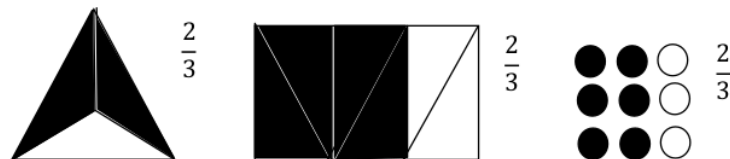
Meskipun berbagai macam gambar 6.3 di atas berbeda bentuk dan ukuran, akan tetapi gambar-gambar 6.3 memiliki atribut/sifat yang sama yaitu 2 dari 3 bagian yang sama. Oleh karena itu pada sub bab ini, akan kita bahas bahwa ada 4 makna pecahan.

1. Pecahan merepresentasikan bagian dari keseluruhan seperti yang ditunjukkan pada Gambar 6.4



Gambar 6.4

2. Pecahan merepresentasikan bagian dari suatu kelompok atau himpunan.



Gambar 6.5

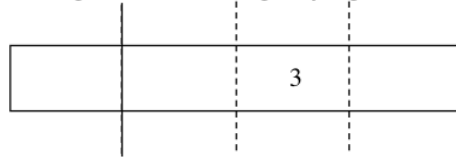
3. Pecahan merepresentasikan bilangan pada suatu garis bilangan.



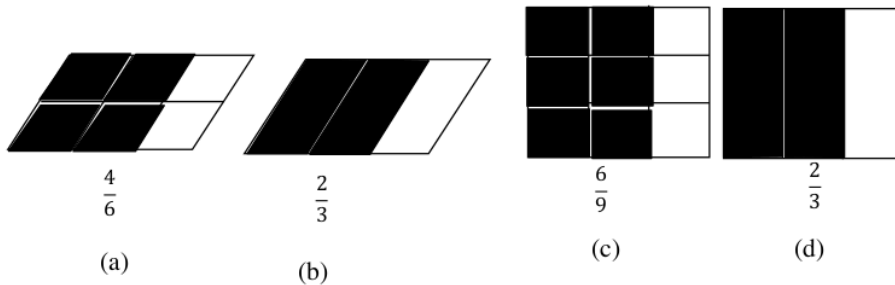
$\frac{2}{3}$ adalah bilangan diantara 0 dan 1. Membagi interval dari 0 sampai 1 ke dalam tiga bagian yang sama, dan membilang 2 yang dimulai dari 0 sampai 1.

4. Pecahan merepresentasikan pembagian. Misal $\frac{3}{4}$ mempunyai makna $3 \div 4$

Membagi 3 kedalam 4 bagian yang sama.



Pada Gambar 6.4, pecahan $\frac{2}{3}$ dapat direpresentasikan dengan pecahan lain $\frac{4}{6}, \frac{6}{9}$ dengan berbagai macam model. Gambar 6.6 berikut merepresentasikan pecahan dengan menggunakan bentuk-bentuk geometri atau daerah yang merepresentasikan suatu pecahan



Gambar 6.6

Jika kita perhatikan secara seksama, maka luas daerah yang terarsir pada Gambar 6.6 (a) adalah sama dengan luas daerah yang terarsir pada gambar 6.6(b). Demikian halnya, luas daerah yang terarsir pada Gambar 6.6(c) adalah sama dengan luas daerah yang terarsir pada Gambar 6.6(d). Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa pecahan $\frac{4}{6}$ senilai dengan pecahan $\frac{2}{3}$, pecahan $\frac{6}{9}$ senilai dengan pecahan $\frac{2}{3}$. Secara umum, kita dapat menyimpulkan bahwa dua pecahan dikatakan senilai jika kedua pecahan tersebut merepresentasikan luas daerah yang terarsir adalah sama.

Untuk memudahkan dalam memvisualisasikan pecahan yang senilai pada siswa SD selain dengan menggunakan bentuk-bentuk geometri pada Gambar 6.6, kita dapat memodelkannya dengan menggunakan strip pecahan pada Gambar 6.7.



Gambar 6.7

Keuntungan dari strip pecahan seperti pada Gambar 6.7 adalah memiliki satuan strip yang ukurannya sama. Gambar 6.7 memang efektif untuk merepresentasikan pecahan senilai dengan bilangan yang sederhana, akan tetapi ada juga kelemahannya. Satu kelemahan merepresentasikan pecahan senilai melalui Gambar 6.7 adalah jika bilangannya besar, misal $\frac{3}{20}$. Untuk mengatasi kelemahan tersebut, pada sub bab ini kita akan membahas teknik yang efektif untuk mencari pecahan senilai. Sebelum kita lebih jauh membahas teknik atau cara menentukan pecahan senilai, mari kita perhatikan kembali Gambar 6.6 (a) dan (b). Luas daerah yang tersisir pada gambar 6.6 (a) adalah sama dengan luas daerah yang tersisir pada Gambar 6.6(b) sehingga dapat disimpulkan bahwa pecahan $\frac{4}{6}$ senilai dengan pecahan $\frac{2}{3}$. Coba perhatikan pecahan $\frac{2}{3}$, jika kita mengalikan pembilang dan penyebutnya dengan dua maka $\frac{2}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{4}{6}$. Demikian juga, jika kita mengalikan pembilang dan penyebut pecahan $\frac{2}{3}$ dengan empat, maka $\frac{2}{3} \times \frac{4}{4} = \frac{8}{12}$. Secara umum, hal ini tertuang dalam aturan dasar pecahan.

Aturan Dasar Pecahan

Untuk sebarang pecahan $\frac{a}{b}$ dan sebarang bilangan cacah $c \neq 0$, berlaku $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$

Aturan dasar pecahan berlaku dalam dua hal. Pertama, kita dapat membagi pembilang dan penyebut suatu pecahan dengan bilangan cacah bukan nol, sebut saja c untuk menyederhanakan $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$. Kedua, kita dapat juga mengalikan pembilang dan penyebut suatu pecahan dengan bilangan cacah bukan nol, sebut saja c untuk merubah $\frac{a}{b}$ ke $\frac{ac}{bc}$.

Untuk menentukan apakah $\frac{8}{12}$ dan $\frac{10}{15}$ adalah sama, maka kita dapat menyederhanakan masing-masing pecahan tersebut dengan menerapkan aturan dasar pecahan. $\frac{8}{12} = \frac{8 \div 4}{12 \div 4} = \frac{2}{3}$ dan $\frac{10}{15} = \frac{10 \div 5}{15 \div 5} = \frac{2}{3}$. Bentuk sederhana dari $\frac{8}{12}$ adalah $\frac{2}{3}$ dan bentuk sederhana dari pecahan $\frac{10}{15}$ adalah $\frac{2}{3}$, sehingga dapat kita simpulkan $\frac{8}{12} = \frac{10}{15}$. Dengan teknik yang serupa, kita dapat memandang pecahan $\frac{8}{12}$ dan $\frac{10}{15}$ sebagai $\frac{8.15}{12.15} = \frac{120}{180}$ dan $\frac{10.12}{15.12} = \frac{120}{180}$. Jika kita perhatikan kembali, kita dapat melihat pecahan $\frac{8}{12}$ dan $\frac{10}{15}$ sebagai $\frac{8.15}{12.15}$ dan $\frac{10.12}{15.12}$, pembilangnya adalah $8.15 = 120$ dan $10.12 = 120$, sehingga hasil perkaliannya sama-sama 120. Demikian juga penyebutnya adalah $12.15 = 180$ dan $15.12 = 180$, dimana hasil perkaliannya sama-sama 180. Dari sini dapat disimpulkan pecahan $\frac{8}{12}$ dan $\frac{10}{15}$ adalah sama.

Jika kita kaji lebih dalam lagi, bilangan-bilangan 8.15 dan 10.12 adalah hasil perkalian silang dari pecahan $\frac{8}{12}$ dan $\frac{10}{15}$.

$$\frac{8}{12} \begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \frac{10}{15}$$

Teknik ini dapat diterapkan pada sebarang pecahan sehingga mengarahkan pada definisi berikut.

DEFINISI

Persamaan Pecahan

Misalkan $\frac{a}{b}$ dan $\frac{c}{d}$ adalah sebarang pecahan, maka $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ jika dan hanya jika $ad = bc$.

Dari definisi ini dapat disimpulkan bahwa dua pecahan $\frac{a}{b}$ dan $\frac{c}{d}$ adalah sama jika dan hanya jika hasil perkalian silangnya antara ad dan bc adalah sama.

TEOREMA

Misal $\frac{a}{b}$ adalah sebarang pecahan, dan n sebarang bilangan cacah bukan nol, maka

$$\frac{a}{b} = \frac{an}{bn} = \frac{na}{nb}$$

Dari teorema ini, ada hal penting yang menjadi catatan kita, pertama menggantikan pecahan $\frac{a}{b}$ dengan $\frac{an}{bn}$, dan 2) menggantikan pecahan $\frac{an}{bn}$ dengan $\frac{a}{b}$. Coba periksa kembali persamaan pada contoh 6.1 berikut dengan menggunakan definisi persamaan pecahan atau teorema sebelumnya.

Contoh 6.1

a. $\frac{3}{4} = \frac{21}{28}$ b. $\frac{108}{156} = \frac{7}{8}$ c. $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

SOLUSI

a. $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 7} = \frac{21}{28}$ (penerapan teorema dasar pecahan)

b. $\frac{108}{156} = \frac{108 \div 12}{156 \div 12} = \frac{9}{13}$ (menyederhanakan pecahan berdasarkan teorema dasar pecahan)

c. $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ (hasil dari perkalian silang, dimana 12×3 sama dengan 36×1)

Tentukan bentuk sederhana dari pecahan berikut.

a. $\frac{49}{56} = \frac{49 \div 7}{56 \div 7} = \frac{7}{8}$

b. $\frac{63}{81} = \frac{63 \div 9}{81 \div 9} = \frac{7}{9}$

c. $\frac{105}{180} = \frac{105 \div 15}{180 \div 15} = \frac{7}{12}$

d. $\frac{108}{48} = \frac{108 \div 12}{48 \div 12} = \frac{9}{4}$

Jika kita perhatikan pecahan pada poin (d) yaitu $\frac{108}{48}$, maka pembilangnya lebih besar daripada penyebutnya. Pecahan yang pembilangnya lebih besar daripada penyebutnya biasa disebut sebagai pecahan tak wajar (*improper fraction*). Contoh lain dari pecahan tak wajar adalah $\frac{5}{2}, \frac{11}{5}, \frac{115}{25}$. Sebagai contoh, pecahan $\frac{9}{4}$ mempunyai makna bahwa suatu objek dibagi menjadi 4 bagian yang sama dan 9

bagian yang akan dimodelkan atau ditunjukkan. Gambar 6.8 mengilustrasikan model $\frac{9}{4}$



Gambar 6.8

Gambar 6.8 mengilustrasikan bahwa ada seperempat bagian terarsir sebanyak 9. Perlu diperhatikan bahwa satu lingkaran utuh merepresentasikan satu unit. Berdasarkan Gambar 6.8, pecahan $\frac{9}{4}$ dapat dipandang sebagai 2 lingkaran utuh plus $\frac{1}{4}$ atau dapat ditulis $2\frac{1}{4}$. Pecahan $2\frac{1}{4}$ merupakan kombinasi dari bilangan cacah dengan pecahan yang tepat di sebelah kanannya, sehingga dikenal sebagai pecahan campuran.

MENGURUTKAN PECAHAN

Konsep-konsep lebih dari dan kurang dari dalam suatu pecahan dapat dimodelkan dengan menggunakan strip pecahan. Sebagai contoh mana yang lebih kecil antara pecahan $\frac{2}{5}$ dengan $\frac{3}{5}$. Untuk menjawab persoalan ini, kita dapat memodelkannya melalui strip pecahan seperti gambar 6.9 berikut.



(a)



(b)

Gambar 6.9

Karena luas daerah yang diarsir pada Gambar 6.9 (a) kurang dari luas daerah yang diarsir pada Gambar 6.9 (b) maka dapat disimpulkan $\frac{2}{5} < \frac{3}{5}$

Secara umum ada suatu definisi dalam mengurutkan pecahan dimana jika suatu pecahan memiliki penyebut yang sama maka yang dibandingkan adalah pembilangnya.

DEFINISI

Kurang dari untuk pecahan

Misalkan $\frac{a}{c}$ dan $\frac{b}{c}$ adalah sebarang pecahan. $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ jika dan hanya jika $a < b$

Definisi ini juga berlaku untuk yang “lebih dari, kurang dari atau sama dengan, dan lebih dari atau sama dengan”. Sebagai contoh $\frac{2}{3} < \frac{5}{3}$, karena $2 < 5$; $\frac{5}{11} < \frac{7}{11}$, karena $5 < 7$. Selanjutnya pecahan $\frac{3}{7}$ dan $\frac{14}{27}$ dapat dibandingkan dengan cara menyamakan penyebutnya.

$$\frac{3}{7} = \frac{3 \times 27}{7 \times 27} = \frac{81}{189} \text{ dan } \frac{14}{27} = \frac{14 \times 7}{27 \times 7} = \frac{98}{189}$$

Karena $\frac{81}{189} < \frac{98}{189}$, dapat disimpulkan bahwa $\frac{3}{7} < \frac{14}{27}$.

TEOREMA

Perkalian Silang Dari Pertidaksamaan Pecahan

Misalkan $\frac{a}{b}$ dan $\frac{c}{d}$ adalah sebarang pecahan dan $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ jika dan hanya jika $ad < bc$.

Teorema ini juga berlaku untuk $\frac{c}{d} > \frac{a}{b}$ jika dan hanya jika $bc > ad$

Contoh 6.2

Susunlah berdasarkan urutan

a $\frac{3}{7}$ dan $\frac{9}{20}$

b $\frac{4}{7}$ dan $\frac{14}{25}$

Solusi

a $60 < 63$ sehingga $\frac{3}{7} < \frac{9}{20}$

b $100 > 98$ sehingga $\frac{4}{7} > \frac{14}{25}$

Seringkali pecahan dapat diurutkan secara mental menggunakan “*fraction sense*”

sebagai contoh pecahan $\frac{5}{6}, \frac{8}{9}, \frac{12}{13}$ merupakan pecahan yang nilainya mendekati 1.

Selanjutnya pecahan $\frac{1}{16}, \frac{1}{17}, \frac{1}{18}$ merupakan pecahan yang nilainya mendekati 0.

Kemudian pecahan $\frac{7}{16}, \frac{9}{17}, \frac{11}{20}$ merupakan pecahan yang nilainya mendekati $\frac{1}{2}$. Oleh

karena itu $\frac{7}{16} < \frac{5}{6}$ karena $\frac{7}{16} \approx \frac{1}{2}$ dan $\frac{5}{6} \approx 1$. Demikian juga pecahan $\frac{1}{16} < \frac{9}{17}$, karena

$$\frac{1}{16} \approx 0 \text{ dan } \frac{9}{17} \approx \frac{1}{2}.$$

Contoh 6.3

Tentukan pecahan diantara pecahan-pecahan berikut ini

a $\frac{7}{11}$ dan $\frac{8}{11}$

b $\frac{9}{13}$ dan $\frac{12}{17}$

Solusi

a $\frac{7}{11} = \frac{14}{22}$ dan $\frac{8}{11} = \frac{16}{22}$ akibatnya $\frac{15}{22}$ diantara $\frac{7}{11}$ dan $\frac{8}{11}$

b $\frac{9}{13} = \frac{9 \cdot 17}{13 \cdot 17} = \frac{153}{13 \cdot 17}$ dan $\frac{12}{17} = \frac{12 \cdot 13}{17 \cdot 13} = \frac{156}{17 \cdot 13}$. Akibatnya $\frac{154}{13 \cdot 17}$ dan $\frac{155}{13 \cdot 17}$ diantara $\frac{9}{13}$ dan $\frac{12}{17}$

Kadang siswa kurang tepat menjumlahkan pembilang dan penyebut untuk menemukan jumlah dari dua pecahan. Masalah ini menarik bahwa teknik sederhana ini menyediakan sebarang cara yang mudah untuk menemukan pecahan diantara dua pecahan yang diberikan. Sebagai contoh untuk pecahan $\frac{2}{3}$ dan $\frac{3}{4}$,

bilangan $\frac{5}{7}$ memenuhi $\frac{2}{3} < \frac{5}{7} < \frac{3}{4}$ karena $2 \cdot 7 < 3 \cdot 5$ dan $5 \cdot 4 < 7 \cdot 3$. Ide ini digeneralisasi dalam teorema berikut.

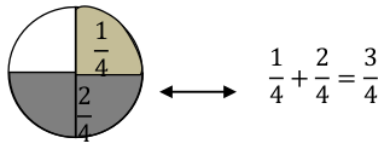
Misal $\frac{a}{b}$ dan $\frac{c}{d}$ adalah sebarang pecahan, dimana $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, maka

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

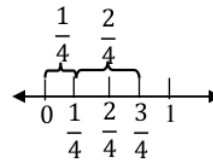
5 PENJUMLAHAN DAN PENGURANGAN PECAHAN

Penjumlahan dan Sifat-Sifatnya

Penjumlahan **pecahan** merupakan perluasan dari penjumlahan bilangan cacah dan dapat diilustrasikan dengan menggunakan model. Misalnya untuk menemukan penjumlahan dari $\frac{1}{4}$ dan $\frac{2}{4}$, kita dapat mengilustrasikannya dengan menggunakan “model bagian” pada Gambar 6.9 dan model “garis bilangan” pada Gambar 6.10



Gambar 6.9 Model Bagian



Gambar 6.10 Model Garis Bilangan

Model yang diilustrasikan pada Gambar 6.9 dan 6.10 dapat diaplikasikan untuk sebarang pecahan yang berpenyebut sama. Berdasarkan definisi untuk menjumlahkan pecahan yang berpenyebut sama adalah dengan menjumlahkan pembilangnya.

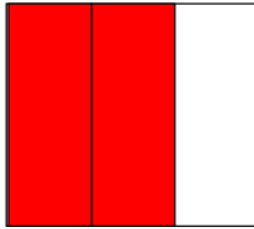
DEFINISI

Penjumlahan Pecahan dengan Penyebut Sama

Misalkan $\frac{a}{b}$ dan $\frac{c}{b}$ adalah sebarang pecahan, maka

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

Selanjutnya untuk menjumlahkan pecahan yang penyebutnya berbeda misal $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$, kita dapat memodelkannya sebagai berikut.



Gambar 6.11

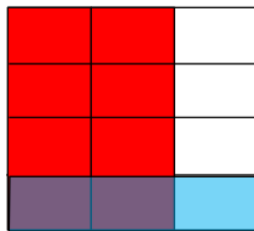
Merepresentasikan pecahan $\frac{2}{3}$



Gambar 6.12

Merepresentasikan pecahan $\frac{1}{4}$

Untuk mengilustrasikan atau memodelkan $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$, berarti model pada Gambar 6.12 ditempelkan di atas model pada Gambar 6.11 sehingga dapat dilihat seperti pada Gambar 6.13 berikut ini



Gambar 6.13

Dari Gambar 6.13, coba hitung ada berapa banyak persegi satuan? Jika kita perhatikan, jumlah semua persegi satuan ada 12 dan banyaknya persegi satuan yang berwarna merah ada 8, serta jumlah persegi satuan yang berwarna biru ada 3. Jumlah keseluruhan persegi satuan yang berwarna (baik warna merah maupun biru) ada 11 dan jumlah keseluruhan persegi satuan ada 12 sehingga $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$. Perhatikan pembilang dan penyebut pada pecahan $\frac{11}{12}$. Bilangan 11

merepresentasikan jumlah persegi satuan yang berwarna biru dan merah. Bilangan 12 merepresentasikan jumlah keseluruhan persegi satuan pada Gambar 6.13.

Model pada Gambar 6.13 efektif jika diterapkan untuk pecahan yang nilainya kecil, akan tetapi model tersebut kurang efektif jika digunakan untuk menghitung penjumlahan pecahan yang nilainya besar seperti $\frac{15}{16} + \frac{7}{11}$. Dari hal ini maka muncul definisi untuk penjumlahan pecahan yang berbeda penyebut.

DEFINISI

Penjumlahan Pecahan yang Berbeda Penyebut

Misal $\frac{a}{b}$ dan $\frac{c}{d}$ adalah sebarang pecahan, maka

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd}$$

PEMBUKTIAN

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} \longrightarrow \text{Pecahan senilai}$$

$$= \frac{ad+bc}{bd} \longrightarrow \text{Penjumlahan dengan penyebut yang sama}$$

Dengan kata lain, untuk menjumlahkan pecahan yang berbeda penyebut, kita dapat menentukan terlebih dahulu pecahan ekuivalen dengan penyebut sama. Selanjutnya, jika penyebutnya sudah sama maka kita dapat menjumlahkan pembilangnya saja.

Contoh 6.4

a. $\frac{2}{9} + \frac{4}{9}$ b. $\frac{3}{7} + \frac{1}{3}$ c. $\frac{7}{6} + \frac{3}{5}$

Solusi

a. $\frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \frac{2+4}{9} = \frac{6}{9}$

b. $\frac{3}{7} + \frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 3}{7 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 7}{3 \cdot 7} = \frac{9}{21} + \frac{7}{21} = \frac{16}{21}$

c. $\frac{5}{12} + \frac{3}{14} = \frac{5 \cdot 14}{12 \cdot 14} + \frac{3 \cdot 12}{12 \cdot 14} = \frac{70}{156} + \frac{36}{156} = \frac{106}{156} = \frac{53}{78}$

Metode alternatif dapat diterapkan pada contoh 6.4 c. Untuk menyamakan penyebut pada contoh 6.4 c sebetulnya kita tidak perlu mengalikan 12.14, akan tetapi kita dapat mencari kelipatan persekutuan terkecil (KPK) dari 12 dan 14. KPK dari 12 dan 14 adalah 84, sehingga

$$\frac{5}{12} + \frac{3}{14} = \frac{5.7}{12.7} + \frac{3.6}{14.6} = \frac{35}{84} + \frac{18}{84} = \frac{53}{84}$$

Dalam sub bab ini juga akan dibahas mengenai sifat-sifat dari operasi penjumlahan pecahan.

1. Sifat Tertutup Untuk Penjumlahan Pecahan

Jumlah dari dua pecahan adalah pecahan

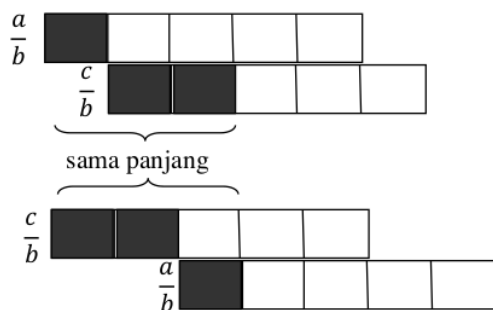
Misal ada dua pecahan yaitu $\frac{a}{c}$ dan $\frac{b}{c}$ sehingga $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ dimana $a + b$ dan c merupakan bilangan cacah, dimana $c \neq 0$.

2. Sifat Komutatif Untuk Penjumlahan Pecahan

Misalkan $\frac{a}{b}$ dan $\frac{c}{b}$ adalah sebarang pecahan, maka

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{c}{b} + \frac{a}{b}$$

Berikut adalah bukti untuk sifat komutatif



3. Sifat Asosiatif Untuk Penjumlahan Pecahan

Misalkan $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{b}$, dan $\frac{e}{b}$ adalah sebarang pecahan, maka

$$\left[\frac{a}{b} + \frac{c}{b} \right] + \frac{e}{b} = \frac{a}{b} + \left[\frac{c}{b} + \frac{e}{b} \right]$$

4. Sifat Identitas Penjumlahan Untuk Penjumlahan Pecahan

Misalkan $\frac{a}{b}$ adalah sebarang pecahan. Ada suatu pecahan yang unik yaitu $\frac{0}{b}$

sehingga $\frac{a}{b} + \frac{0}{b} = \frac{a}{b} = \frac{0}{b} + \frac{a}{b}$

Pengurangan

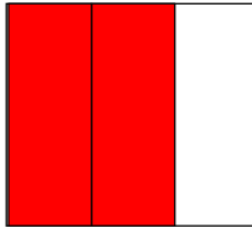
Definisi

Pengurangan Pecahan Dengan Penyebut Sama

Misalkan $\frac{a}{b}$ dan $\frac{c}{b}$ adalah sebarang pecahan dengan $a \geq c$, maka

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a - c}{b}$$

Selanjutnya untuk mengurangi pecahan yang penyebutnya berbeda misal $\frac{2}{3} - \frac{1}{4}$, kita dapat memodelkannya sebagai berikut.



Merepresentasikan pecahan $\frac{2}{3}$

Gambar 6.14



Merepresentasikan pecahan $\frac{1}{4}$

Gambar 6.15

Untuk mengilustrasikan atau memodelkan $\frac{2}{3} - \frac{1}{4}$, berarti kita himpitkan model pada Gambar 6.14 diatas model pada Gambar 6.15 sehingga dapat dilihat seperti pada Gambar 6.16 berikut ini



Gambar 6.16

Dari Gambar 6.16, coba hitung ada berapa banyak persegi satuan? Jika kita perhatikan, jumlah semua persegi satuan ada 12 dan banyaknya persegi satuan yang berwarna merah ada 8, serta jumlah persegi satuan yang berwarna biru ada 3. Banyaknya persegi satuan yang berwarna merah dikurangi dengan banyaknya persegi berwarna biru adalah 5 ($8 - 3 = 5$) dan jumlah keseluruhan persegi satuan ada 12 sehingga $\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$. Perhatikan pembilang dan penyebut pada pecahan $\frac{5}{12}$. Bilangan 5 merepresentasikan hasil pengurangan dari banyaknya persegi satuan yang berwarna merah dan banyaknya persegi satuan yang berwarna biru. Bilangan 12 merepresentasikan jumlah keseluruhan persegi satuan.

Model pada gambar 6.16 efektif jika diterapkan untuk pecahan yang nilainya kecil, akan tetapi model tersebut kurang efektif jika digunakan untuk menghitung pengurangan pecahan yang nilainya besar seperti $\frac{15}{16} - \frac{7}{11}$. Dari hal ini maka muncul teorema untuk pengurangan pecahan yang berbeda penyebut.

TEOREMA

Pengurangan Pecahan Dengan Penyebut Tidak Sama

Misalkan $\frac{a}{b}$ dan $\frac{c}{d}$ adalah sebarang pecahan, dimana $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$, maka

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

Contoh 6.5

Tentukan hasil pengurangan dari pecahan berikut

a. $\frac{7}{9} - \frac{3}{5}$ b. $\frac{13}{18} - \frac{8}{27}$ c. $\frac{9}{10} - \frac{7}{15}$

Solusi

a. $\frac{7}{9} - \frac{3}{5} = \frac{35-27}{45} = \frac{8}{45}$

b. $\frac{13}{18} - \frac{8}{27} = \frac{39-16}{54} = \frac{23}{54}$

c. $\frac{9}{10} - \frac{7}{15} = \frac{27-14}{30} = \frac{13}{30}$

Mental Math dan Estimasi Untuk Penjumlahan dan Pengurangan

Hitung secara mental

a. $\left(\frac{1}{5} + \frac{3}{4}\right) + \frac{4}{5} =$

b. $3\frac{4}{5} + 2\frac{2}{5} =$

c. $40 - 8\frac{3}{7} =$

Solusi

1. $\left(\frac{1}{5} + \frac{3}{4}\right) + \frac{4}{5} = \frac{4}{5} + \left(\frac{1}{5} + \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{4}{5} + \frac{1}{5}\right) + \frac{3}{4} = 1\frac{3}{4}$

Untuk soal ini kita dapat menggunakan sifat komutatif dan asosiatif untuk menjumlahkan $\frac{1}{5}$ dan $\frac{4}{5}$ karena kedua pecahan ini adalah kompatibel dimana jika dijumlahkan hasilnya satu

2. $3\frac{4}{5} + 2\frac{2}{5} = 4 + 2\frac{1}{5} = 6\frac{1}{5}$

Soal pada poin b ini menggunakan kompensasi penjumlahan, dimana $3\frac{4}{5}$ ditambahkan dengan $\frac{1}{5}$ sehingga menghasilkan 4 dan akibatnya $2\frac{2}{5}$ dikurangi dengan $\frac{1}{5}$ sehingga menghasilkan $2\frac{1}{5}$

$$3. 40 - 8\frac{3}{7} = 40\frac{4}{7} - 9 = 31\frac{4}{7}$$

Untuk soal pada poin c, kita dapat menjumlahkan $\frac{4}{7}$ pada pecahan $8\frac{3}{7}$ (karena $(8\frac{3}{7} + \frac{4}{7} = 9)$ dan 40. Soal pada poin c ini juga dapat dipandang sebagai $39\frac{7}{7} - 8\frac{3}{7} = 31\frac{4}{7}$

PERKALIAN DAN PEMBAGIAN

DEINISI

Perkalian Pecahan

Misal $\frac{a}{b}$ dan $\frac{c}{d}$ adalah sebarang pecahan. Maka

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Contoh 6.6

Hitunglah hasil kali soal-soal berikut dan nyatakan jawabannya dalam bentuk yang sederhana

$$a. \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \quad b. \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{8} \quad c. 5\frac{1}{3} \cdot 2\frac{1}{6}$$

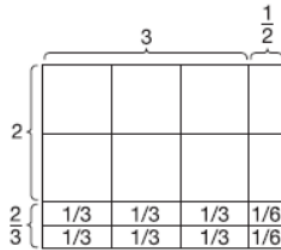
Solusi

$$a. \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{15} \quad b. \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{8} = \frac{12}{56} = \frac{3}{14} \quad c. 5\frac{1}{3} \cdot 2\frac{1}{6} = \frac{16}{3} \cdot \frac{13}{6} = \frac{208}{18} = \frac{104}{9} \text{ atau } 11\frac{5}{9}$$

Dua pecahan campuran pada contoh poin c, memungkinkan anak melakukan kesalahan dalam mengalikan pecahan campuran seperti berikut ini.

$$\begin{aligned} 5\frac{1}{3} \cdot 2\frac{1}{6} &= (5 \times 2) + (\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}) \\ &= 10\frac{1}{18} \end{aligned}$$

Akan tetapi kesalahan ini dapat diatasi dengan menggunakan ilustrasi pada Gambar 6.17



Gambar 6.17

$$(2 \times 3) + \left(2 \times \frac{1}{2}\right) + \left(3 \times \frac{2}{3}\right) + \left(2 \times \frac{1}{6}\right)$$

$$6 + 1 + 2 + \frac{1}{3} = 9\frac{1}{3}$$

Pada sub bab ini kita akan membahas juga mengenai sifat-sifat perkalian pecahan. Sama hal nya dengan bilangan bulat, pecahan juga memiliki sifat-sifat, akan tetapi ada satu tambahan sifat baru yang berbeda dari sifat-sifat bilangan cacah, yaitu sifat invers perkalian.

Sifat-Sifat Perkalian Pecahan

Misalkan $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, dan $\frac{e}{f}$ adalah sebarang pecahan

1. Sifat Tertutup Perkalian Pecahan

Hasilkali dari dua pecahan adalah pecahan

2. Sifat Komutatif perkalian pecahan

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$$

3. Sifat Asosiatif perkalian Pecahan

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right)$$

4. Sifat Identitas Perkalian Pecahan

$$\frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b} = 1 \cdot \frac{a}{b} \quad \left(1 = \frac{m}{m}, m \neq 0\right)$$

5. Sifat Invers Perkalian Pecahan

Untuk setiap pecahan tidak nol $\frac{a}{b}$, ada suatu pecahan yang unik atau tunggal $\frac{b}{a}$

$$\text{sehingga } \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$$

Ketika $\frac{a}{b} \neq 0$, $\frac{b}{a}$ disebut sebagai invers perkalian atau kebalikan dari $\frac{a}{b}$. Sifat invers perkalian berguna dalam menyelesaikan masalah seperti pada Contoh 6.7.

Contoh 6.7

Selesaikan $\frac{5}{3}x = \frac{1}{10}$

Solusi

$$\frac{5}{3}x = \frac{1}{10}$$

$$\frac{3}{5}\left(\frac{5}{3}x\right) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{10}$$

$$\left(\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3}\right)x = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{10}$$

$$1 \cdot x = \frac{3}{50}$$

$$x = \frac{3}{50}$$

Sama halnya dengan bilangan cacah, sifat distributif juga dipenuhi oleh pecahan.

Sifat ini dapat diverifikasi menggunakan distributif dalam bilangan cacah

SIFAT

Sifat Distributif Perkalian Pecahan Terhadap Penjumlahan

Misalkan $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, dan $\frac{e}{f}$ adalah sebarang pecahan, maka

$$\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \times \frac{e}{f}$$

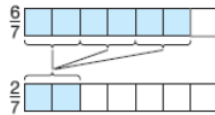
Distributif perkalian terhadap pengurangan juga dipenuhi, dimana

$$\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d} - \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \times \frac{e}{f}$$

PEMBAGIAN

Pembagian pecahan merupakan konsep yang dirasa sangat sulit bagi anak, karena kurangnya pemanfaatan model-model konkret yang sederhana. Kita akan melihat pembagian pecahan sebagai perluasan dari pembagian bilangan cacah. Beberapa

pendekatan akan berguna di dalam sub bab ini dan berguna dalam menyelesaikan masalah. Pendekatan ini menyediakan cara bermakna dalam belajar pecahan. Dengan menggunakan penyebut yang sama, pembagian pecahan dapat dipandang sebagai pembagian bilangan cacah. Sebagai contoh dalam menyelesaikan $\frac{6}{7} \div \frac{2}{7}$ kita dapat mengajukan pertanyaan “berapa banyak kelompok $\frac{2}{7}$ dalam $\frac{6}{7}$?” Jawaban pertanyaan ini adalah ekuivalen dengan masalah $6 \div 2$ dimana pertanyaannya adalah berapa banyak kelompok berukuran 2 dalam 6? Karena ada 3 kelompok yang berukuran 2 dalam 6 maka ada 3 kelompok yang berukuran $\frac{2}{7}$ dalam $\frac{6}{7}$. Gambar 6.18 mengilustrasikan masalah ini secara visual



Gambar 6.18

Contoh 6.8

Tentukan hasil dari pembagian pecahan berikut.

a. $\frac{16}{13} \div \frac{4}{13}$ b. $\frac{6}{17} \div \frac{3}{17}$ c. $\frac{24}{19} \div \frac{2}{19}$

Solusi

a. $\frac{16}{13} \div \frac{4}{13} = 4$, karena ada empat $\frac{4}{13}$ dalam $\frac{16}{13}$

b. $\frac{6}{17} \div \frac{3}{17} = 2$, karena ada dua $\frac{3}{17}$ dalam $\frac{6}{17}$

c. $\frac{24}{19} \div \frac{2}{19} = 12$, karena ada dua belas $\frac{2}{19}$ dalam $\frac{24}{19}$

Perhatikan bahwa jawaban ketiga masalah dalam contoh 6.8 ini dapat ditemukan hanya dengan membagi pembilang dalam urutan yang benar.

Selanjutnya dalam kasus $\frac{12}{13} \div \frac{5}{13}$, maka kita akan bertanya-tanya dalam diri kita sendiri “berapa banyak $\frac{5}{13}$ yang dapat dibuat dalam $\frac{12}{13}$?” dan ini merupakan pertanyaan yang sama dengan “berapa banyak 5 dalam 12?” Jawabannya adalah

$\frac{12}{5}$. Oleh karena itu $\frac{12}{13} \div \frac{5}{13} = \frac{12}{5}$. Secara umum, pembagian pecahan didefinisikan sebagai berikut:

DEFINISI

Pembagian Pecahan dengan Penyebut yang Sama

Misal $\frac{a}{b}$ dan $\frac{c}{b}$ sebarang pecahan dengan $c \neq 0$, maka

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{b} = \frac{a}{c}$$

Selanjutnya untuk membagi pecahan yang penyebutnya berbeda misal $\frac{2}{3} \div \frac{1}{4}$, kita dapat membuktikannya secara matematis ataupun memodelkannya dengan menggunakan media

Bukti secara matematis

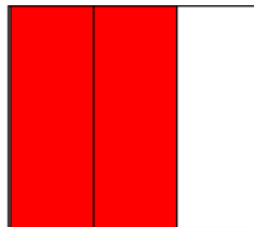
Untuk membagi pecahan dengan penyebut yang berbeda, kita dapat menuliskan kembali pecahan sehingga pecahan-pecahan tersebut mempunyai penyebut yang sama. Oleh karena itu kita dapat melihat bahwa

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \div \frac{bc}{bd} = \frac{ad}{bc} = \left(\frac{a}{b} \times \frac{d}{c} \right)$$

Penggunaan pecahan dengan penyebut yang berbeda dapat dicontohkan sebagai berikut.

$$\frac{7}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{7}{4} \times \frac{2}{1} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

Perhatikan bahwa hasil bagi $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ adalah sama dengan hasil kali $\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$. Oleh karena prosedur untuk pembagian pecahan adalah membalik pembagi dan mengalikannya. Misal kita akan merepresentasikan pembagian pecahan $\frac{2}{3} \div \frac{1}{4}$



Merepresentasikan pecahan $\frac{2}{3}$

Gambar 6.19



Merepresentasikan pecahan $\frac{1}{4}$

Gambar 6.20

Untuk mengilustrasikan atau memodelkan $\frac{2}{3} \div \frac{1}{4}$, berarti kita himpitkan model pada Gambar 6.19 dan model pada Gambar 6.20 sehingga dapat dilihat seperti pada Gambar 6.21 berikut ini



Gambar 6.21

Dari Gambar 6.21, coba hitung ada berapa banyak persegi satuan? Jika kita perhatikan, jumlah semua persegi satuan ada 12 dan banyaknya persegi satuan yang berwarna merah ada 8, serta jumlah persegi satuan yang berwarna biru ada 3. Banyaknya persegi satuan yang berwarna merah dibanding banyaknya persegi satuan yang berwarna biru adalah 8 dibanding 3, sehingga $\frac{2}{3} \div \frac{1}{4} = \frac{8}{3}$. Perhatikan pembilang dan penyebut pada pecahan $\frac{2}{3}$. Bilangan 8 merepresentasikan banyaknya persegi satuan yang berwarna merah dibanding banyaknya persegi satuan yang berwarna biru dan bilangan 12 merepresentasikan jumlah keseluruhan persegi satuan.

Model pada Gambar 6.21 efektif jika diterapkan untuk pecahan yang nilainya kecil, akan tetapi model tersebut kurang efektif jika digunakan untuk menghitung pembagian pecahan yang nilainya besar seperti $\frac{15}{16} \div \frac{7}{11}$. Dari hal ini memunculkan teorema untuk pembagian pecahan yang berbeda penyebut.

TEOREMA

Pembagian Pecahan Dengan Penyebut Yang Tidak Sama

Membalik Pembagi Dan Kemudian Mengalikannya

Misalkan $\frac{a}{b}$ dan $\frac{c}{d}$ adalah sebarang pecahan dengan $c \neq 0$, maka

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Contoh 6.9

Tentukan hasil bagi berikut

a $\frac{7}{4} \div \frac{1}{2}$

b $\frac{15}{16} \div \frac{3}{4}$

c $\frac{39}{56} \div \frac{3}{8}$

Solusi

a $\frac{7}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{7}{4} \times \frac{2}{1} = \frac{7}{2}$

b $\frac{15}{16} \div \frac{3}{4} = \frac{15 \div 3}{16 \div 4} = \frac{5}{4}$

c $\frac{25}{17} \div \frac{5}{17} = \frac{25}{5} = 5$

MENTAL MATH DAN ESTIMASI UNTUK PERKALIAN DAN PEMBAGIAN

Teknik *mental math* dan estimasi pada pecahan serupa dengan teknik yang digunakan pada bilangan cacah.

Contoh 6.10

Hitung secara mental

a $(25 \times 16) \times \frac{1}{4}$

b $24 \frac{4}{7} : 4$

c $\frac{4}{5} \times 15$

Solusi

a $(25 \times 16) \times \frac{1}{4} = 25 \times \left(16 \times \frac{1}{4}\right) = 25 \times 4 = 100$

Mengaplikasikan sifat asosiatif untuk mengelompokkan 16 dan $\frac{1}{4}$ secara bersama-sama, karena 16 dan $\frac{1}{4}$ adalah bilangan kompatibel. Demikian juga dengan 25 dan 4 yang juga bilangan kompatibel.

$$\text{b. } 24\frac{4}{7} : 4 = \left(24 + \frac{4}{7}\right) \div 4 = (24 \div 4) + \left(\frac{4}{7} \div 4\right) = 6 + \frac{1}{7} = 6\frac{1}{7}$$

$$\text{c. } \frac{4}{5} \times 15 = \left(4 \times \frac{1}{5}\right) \times 15 = 4 \times \left(\frac{1}{5} \times 15\right) = 4 \times 3 = 12$$

Contoh 6.11

Estimasi hasil perkalian dari soal-soal di bawah ini

$$\text{a. } 5\frac{1}{8} \times 7\frac{5}{6}$$

$$\text{b. } 4\frac{3}{8} \times 9\frac{1}{16}$$

$$\text{c. } 14\frac{8}{9} \div 2\frac{3}{8}$$

Solusi

$$\text{a. } 5\frac{1}{8} \times 7\frac{5}{6} \text{ Hasilnya adalah antara } 5 \times 7 = 35 \text{ dan } 6 \times 8 = 48$$

$$\text{b. } 4\frac{3}{8} \times 9\frac{1}{16} \approx 4\frac{1}{2} \times 9 = 36 + 4\frac{1}{2} = 40\frac{1}{2}$$

$$\text{c. } 14\frac{8}{9} \div 2\frac{3}{8} \approx 15 \div 2\frac{1}{2} = 6$$

LATIHAN

- Sebutkan pecahan yang merepresentasikan bagian yang diarsir pada setiap gambar berikut ini.

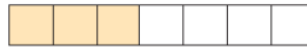
a.



b.



c.



- Apakah gambar berikut merepresentasikan $\frac{1}{3}$? Jelaskan



3. Sederhanakan pecahan berikut.
 a. $\frac{21}{28}$ b. $\frac{49}{56}$ c. $\frac{108}{156}$ d. $\frac{220}{100}$
4. Tentukan apakah pasangan dari pecahan berikut ini sama (Nyatakan pecahan berikut dalam bentuk yang sederhana)
 a. $\frac{5}{8}$ dan $\frac{625}{1000}$ b. $\frac{11}{18}$ dan $\frac{275}{450}$ c. $\frac{24}{36}$ dan $\frac{50}{72}$
5. Susunlah pecahan berikut, mulai dari yang terkecil hingga yang terbesar.
 a. $\frac{4}{7}, \frac{7}{13}, \frac{14}{25}$ b. $\frac{3}{11}, \frac{7}{23}, \frac{2}{9}, \frac{5}{18}$
6. Tuliskan kembali pecahan berikut dalam bentuk pecahan campuran
 a. $\frac{2232}{444}$ b. $\frac{8976}{144}$
7. Tentukan hasil dari penjumlahan berikut dan nyatakan jawabanmu dalam bentuk yang sederhana
 a. $\frac{3}{7} + \frac{1}{3}$ b. $\frac{8}{13} + \frac{4}{51}$ c. $\frac{7}{10} + \frac{20}{100}$
8. Tentukan hasil pengurangan berikut
 a. $\frac{3}{7} - \frac{2}{9}$ b. $\frac{13}{18} - \frac{8}{27}$ c. $\frac{21}{51} - \frac{7}{39}$
9. Tentukan hasil kali berikut
 a. $5\frac{1}{3} \times 2\frac{1}{6}$ b. $3\frac{7}{8} \times 2\frac{3}{4}$ c. $3\frac{3}{4} \times 2\frac{2}{5}$
10. Tentukan hasil pembagian berikut dan nyatakan jawabanmu dalam pecahan yang paling sederhana
 a. $\frac{9}{11} \div \frac{2}{3}$ b. $\frac{17}{100} \div \frac{9}{10.000}$ c. $\frac{6}{35} \div \frac{4}{21}$

RANGKUMAN

1. Pada awalya pecahan digunakan untuk merepresentasikan bagian dari keseluruhan
2. Secara konseptual, suatu pecahan disimbolkan $\frac{a}{b}$, dimana a dan b adalah bilangan cacah dan $b \neq 0$. a disebut sebagai pembilang dan b disebut sebagai penyebut.
3. Ada 4 makna pecahan.
 - a Pecahan merepresentasikan bagian dari keseluruhan
 - b Pecahan merepresentasikan bagian dari suatu kelompok atau himpunan.

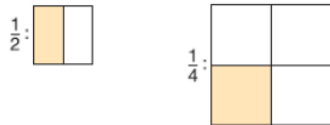
- c Pecahan merepresentasikan bilangan pada suatu garis bilangan.
- d Pecahan merepresentasikan pembagian.
4. Dua pecahan dikatakan senilai jika kedua pecahan tersebut merepresentasikan luas daerah yang tersir adalah sama.
 5. Aturan dasar pecahan berlaku dalam dua hal. Pertama, kita dapat membagi pembilang dan penyebut suatu pecahan dengan bilangan cacah bukan nol, sebut saja c untuk **menyederhanakan** $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$. Kedua, kita dapat juga mengalikan pembilang dan penyebut suatu pecahan dengan bilangan cacah bukan nol, sebut saja c untuk **merubah** $\frac{a}{b}$ ke $\frac{ac}{bc}$.
 6. Misalkan $\frac{a}{b}$ dan $\frac{c}{d}$ adalah sebarang pecahan, maka $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ jika dan hanya jika $ad = bc$.
 7. Misal $\frac{a}{b}$ adalah sebarang pecahan, dan n sebarang bilangan cacah bukan nol, maka $\frac{a}{b} = \frac{an}{bn} = \frac{na}{nb}$
 8. Pecahan yang pembilangnya lebih besar daripada penyebutnya biasa disebut sebagai pecahan tak wajar (*improper fraction*). Contoh lain dari pecahan tak wajar adalah $\frac{5}{2}, \frac{9}{4}, \frac{11}{5}, \frac{115}{25}$
 9. Misalkan $\frac{a}{c}$ dan $\frac{b}{c}$ adalah sebarang pecahan. $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ jika dan hanya jika $a < b$
 10. Misalkan $\frac{a}{b}$ dan $\frac{c}{d}$ adalah sebarang pecahan dan $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ jika dan hanya jika $ad < bc$. Teorema ini juga berlaku untuk $\frac{c}{d} > \frac{a}{b}$ jika dan hanya jika $bc > ad$
 11. Misalkan $\frac{a}{b}$ dan $\frac{c}{b}$ adalah sebarang pecahan, maka $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$
 12. Misal $\frac{a}{b}$ dan $\frac{c}{d}$ adalah sebarang pecahan, maka $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd}$
 13. Misalkan $\frac{a}{b}$ dan $\frac{c}{b}$ adalah sebarang pecahan dengan $a \geq c$, maka $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$
 14. Misalkan $\frac{a}{b}$ dan $\frac{c}{d}$ adalah sebarang pecahan, dimana $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$, maka

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$
 15. Misal $\frac{a}{b}$ dan $\frac{c}{d}$ adalah sebarang pecahan. Maka $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
 16. Misal $\frac{a}{b}$ dan $\frac{c}{b}$ sebarang pecahan dengan $c \neq 0$, maka $\frac{a}{b} \div \frac{c}{b} = \frac{a}{c}$
 17. Misalkan $\frac{a}{b}$ dan $\frac{c}{d}$ adalah sebarang pecahan dengan $c \neq 0$, maka $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

TES FORMATIF

Untuk memeriksa sejauh mana pemahaman Anda mengenai himpunan dan bilangan cacah, coba kerjakan masalah-masalah di bawah ini.

1. $\frac{3}{5}$ dari 25 seluruh siswa di kelas adalah perempuan. Berapa banyak siswa laki-laki yang ada di kelas tersebut?
2. Perpustakaan sekolah berisi sekitar 5280 buku. Dari kelima belas buku merupakan buku SMP, berapa banyak buku lainnya yang ada di perpustakaan?
3. Tentukan apakah strategi berikut benar atau salah. Jelaskan
 - a. $\frac{ab+c}{b} = a + c$
 - b. $\frac{a+b}{a+c} = \frac{b}{c}$
 - c. $\frac{ab+ac}{ad} = \frac{b+c}{d}$
4. Apa yang salah dari argumen berikut ini.



Oleh karenanya $\frac{1}{4} > \frac{1}{2}$ karena luas persegi yang diarsir lebih besar dari luas persegi panjang yang diarsir

5. Ibu Rahma dan Pak Rudi memberikan tes yang sama di kelas empat. Di kelas Ibu Rahma, 28 dari 36 siswa lulus ujian. Di kelas Pak Rudi, 26 dari 32 siswa lulus ujian. Kelas mana yang memiliki tingkat kelulusan yang lebih tinggi?
6. Sekitar seperlima dari anggaran negara berlaku untuk pertahanan. Jika total anggarannya adalah 400 miliar, berapa yang dibelanjakan untuk pertahanan?
7. Seorang pejalan kaki menempuh jarak rata-rata 2 kilometer per jam (km / jam) naik ke tempat pengamatan dan melakukan perjalanan dengan kecepatan rata-rata 5 km / jam turun kembali. Jika seluruh perjalanan (tidak termasuk makan siang yang berhenti di tempat pengintaian) memakan waktu sekitar 3 jam dan 15 menit, berapakah total jarak pejalan kaki yang berjalan? Bulatkan jawaban Anda sampai sepersepuluh kilometer terdekat.

8. Biaya kuliah di universitas negeri adalah sekitar dua-sembilan biaya kuliah di universitas swasta. Jika rata-rata uang kuliah di universitas swasta sekitar 12.600.000 per tahun, berapa yang harus Anda bayar jika kuliah di universitas negeri?
9. John menghabiskan seperempat hidupnya sebagai anak laki-laki yang tumbuh dewasa, seperenam dari hidupnya di perguruan tinggi, dan setengah dari hidupnya sebagai seorang guru. Dia menghabiskan enam tahun terakhirnya untuk pensiun. Berapa umurnya saat dia meninggal?
10. Tentukan penjumlahan dari
- $$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{100}}$$
11. Tentukan penjumlahan dari
- $$\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \cdots + \frac{1}{21 \times 23}$$

BAB 7**DESIMAL, RASIO, PROPORSI, DAN PERSEN**

Di Bab 6 kita telah membahas tentang pecahan yang merepresentasikan bagian-bagian dari keseluruhan. Selanjutnya untuk bab 7 ini, kami memperkenalkan desimal sebagai sistem numerasi yang sesuai untuk pecahan, dan persen yang merupakan representasi pecahan yang sering dilibatkan dalam bidang perdagangan. Kemudian konsep rasio dan proporsi dikembangkan karena kepentingan keduanya dalam aplikasi matematika.

Desimal digunakan untuk merepresentasikan pecahan. Mesir kuno mengembangkan notasi pecahan lebih dari 3.500 tahun yang lalu untuk pengukuran dan penghitungan, tetapi notasi pecahan sering digunakan untuk membandingkan ukuran dari dua bilangan atau untuk melakukan penghitungan. Notasi desimal adalah salah satu penemuan matematika yang sangat menguras tenaga. Simon Stevin (1548-1620), seorang insinyur Flemish pertama kali mendiskusikan notasi desimal dan desimal aritmatik dalam beberapa kasus.

Notasi desimal menggunakan perluasan dari sistem nilai tempat bilangan cacah untuk merepresentasikan bilangan. Sebagai hasilnya, algoritma aritmatika desimal menggunakan bilangan cacah atau algoritma bilangan bulat dengan aturan penjumlahannya untuk menggeser dan menempatkan titik desimal.

Desimal juga signifikan dalam matematika karena sebagaimana yang telah Pythagorean temukan lebih dari 2000 tahun yang lalu dimana bilangan rasional sendiri tidak cukup untuk mengukur panjang. Pertama, bilangan irasional yang Pythagorean temukan adalah akar kuadrat tertentu.

Meskipun himpunan bilangan rasional sangat padat, akan tetapi itu tidak mewakili setiap titik pada garis bilangan. Bilangan desimal mencakup bilangan rasional dan irasional sehingga memungkinkan untuk memberi label pada setiap titik pada garis bilangan dan untuk mengukur panjang apapun. Penyatuan himpunan bilangan rasional dan irasional disebut himpunan bilangan real.

Kompetensi Dasar:

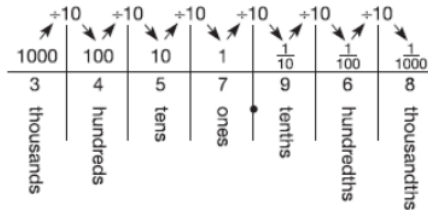
Kompetensi dasar dalam mempelajari materi desimal, rasio, proporsi, dan persen adalah mahasiswa mampu menerapkan konsep desimal, rasio, proporsi, dan persen dalam menyelesaikan masalah.

Indikator

- a. Menjelaskan pengertian desimal
- b. Membandingkan dua desimal yang berbeda
- c. Mencontohkan jenis-jenis operasi pada desimal
- d. Mengurutkan desimal
- e. Menjelaskan pengertian rasio
- f. Menyebutkan contoh rasio
- g. Menjelaskan pengertian proporsi
- h. Menyebutkan contoh proporsi
- i. Menjelaskan pengertian persen
- j. Menerapkan konsep bilangan rasional, desimal, proporsi, dan persen dalam penyelesaian masalah

DESIMAL

Metode yang digunakan untuk menyatakan desimal ditunjukkan pada Gambar 7.1



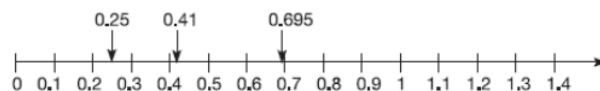
Gambar 7.1

Perhatikan Gambar 7.1, bilangan 3457,968 menunjukkan bahwa tanda koma ditempatkan diantara kolom satuan dan kolom persepuluh untuk menunjukkan dimana porsi bilangan cacah berakhir dan dimana porsi desimal (pecahan) dimulai. Jika bilangan 3457,968 diuraikan penulisannya, maka menjadi

$$3(1000) + 4(100) + 5(10) + 7(1) + 9\left(\frac{1}{10}\right) + 6\left(\frac{1}{100}\right) + 8\left(\frac{1}{1000}\right)$$

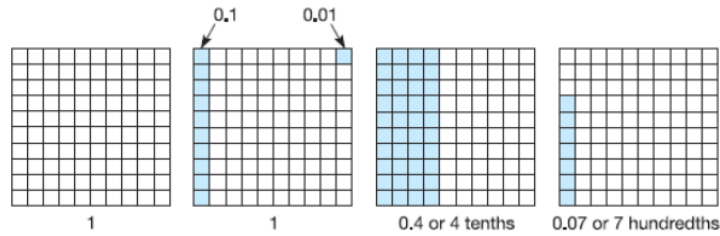
Dari bentuk tersebut kita dapat melihat bahwa $3457,968 = 3457 \frac{968}{1000}$ sehingga diaca tiga ribu empat ratus lima puluh tujuh dan sembilan ratus enam puluh delapan per seribu. Dalam hal ini yang perlu menjadi catatan adalah kata “dan” mengindikasikan dimana tanda koma pada bilangan desimal diletakkan.

Suatu garis bilangan dapat juga digunakan untuk menunjukkan desimal. Garis bilangan pada Gambar 7.2 menunjukkan lokasi dari berbagai macam desimal antar 0 dan 1



Gambar 7.2

Persegi ratusan seperti pada Gambar 7.3 juga dapat digunakan untuk merepresentasikan persepuluh dan perseratus. Perhatikan bahwa persegi yang utuh merepresentasikan 1, dan satu strip vertikal merepresentasikan 0,1, serta setiap satu persegi terkecil merepresentasikan 0,01.



Gambar 7.3

Contoh 7.1

Tuliskan kembali setiap bilangan berikut ini dalam bentuk desimal.

a. $\frac{7}{100}$

b. $\frac{123}{10.000}$

c. $1\frac{7}{8}$

Jawaban

a. $\frac{7}{100} = 0,07$ b. $\frac{123}{10.000} = 0,0123$

c. $1\frac{7}{8} = 1 + \frac{7}{8} = 1 + \frac{7 \times 125}{8 \times 125} = 1 + \frac{875}{1000} = 1 + \frac{800}{1000} + \frac{70}{1000} + \frac{5}{1000}$

$$1 + \frac{8}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1000} = 1,875$$

Desimal Terurut

Cara mengurutkan desimal dapat menggunakan persegi ratusan, garis bilangan, dan membandingkannya dalam bentuk pecahan, serta metode nilai tempat. Untuk memperjelas pemahaman Anda tentang desimal terurut, perhatikan contoh 7.3

Contoh 7.3

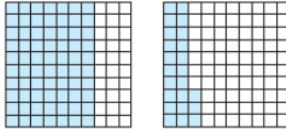
Tentukan mana yang lebih besar dari setiap pasangan bilangan berikut dalam empat cara.

a. $0,7 \dots 0,23$

b. $0,135 \dots 0,14$

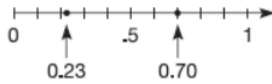
Solusi

a **Persegi ratusan:** Lihat Gambar 7.4 karena 0,7 merepresentasikan bahwa daerah yang diarsir lebih banyak daripada 0,23, maka dapat disimpulkan bahwa $0,7 > 0,23$



Gambar 7.4

Garis bilangan: Lihat Gambar 7.5, karena 0,7 di sebelah kanan 0,23 maka $0,7 > 0,23$

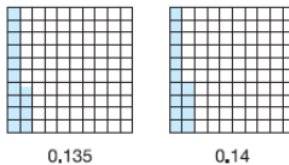


Gambar 7.5

Metode Pecahan: Pertama $0,7 = \frac{7}{10}$, $0,23 = \frac{23}{100}$. Sekarang perhatikan bahwa $\frac{7}{10} = \frac{70}{100}$ dan $\frac{70}{100} > \frac{23}{100}$ (karena $70 > 23$). Sehingga dapat disimpulkan $0,7 > 0,23$

Metode Nilai Tempat : $0,7 > 0,23$, karena $7 > 2$. Secara nalar, selain menggunakan metode ini dimana $7 > 2$, kita punya $0,7 > 0,2$.

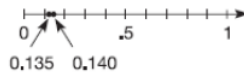
b **Persegi ratusan:** Bilangan 0,135 diperoleh dari satu per sepuluh ditambah tiga per seratus, ditambah lima per seribu. Karena $\frac{5}{1000} = \frac{1}{200} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{100}$, maka $13\frac{1}{2}$ persegi yang harus terarsir untuk menunjukkan 0,135. Bilangan 0,14 direpresentasikan oleh 14 persegi pada persegi ratusan. Lihat Gambar 7.6, karena lebih setengah persegi yang terarsir, sehingga dapat disimpulkan $0,14 > 0,135$



Gambar 7.6

Garis bilangan: Lihat Gambar 7.7. Karena 0,14 di sebelah kanan 0,135 pada garis

bilangan, maka $0,14 > 0,135$



Gambar 7.7

Metode Pecahan: $0,135 = \frac{135}{1000}$ dan $0,14 = \frac{14}{100} = \frac{140}{1000}$ Karena $140 > 135$, kita punya maka $0,14 > 0,135$. Mungkin banyak siswa yang akan menuliskan bahwa $0,135 > 0,14$ karena mereka mengetahui bahwa $135 > 14$ dan percaya bahwa situasi ini adalah sama. Perlu ditekankan di sini bahwa kondisi ini tidak sama. Di sini kita membandingkan desimal, bukan bilangan cacah. Perbandingan desimal dapat dikonversikan ke dalam perbandingan bilangan cacah asalkan penyebutnya sama. Sebagai contoh $0,14 > 0,135$ karena $\frac{140}{1000} > \frac{135}{1000}$ atau $0,140 > 0,135$

Metode Nilai Tempat: $0,14 > 0,135$, karena 1) sepersepuluh nya adalah sama (keduanya sama-sama 1) 2) akan tetapi nilai tempat seperseratusnya dalam 0,14 yaitu 4 adalah lebih besar daripada nilai tempat seperseratusnya dalam 0,135 yaitu 3

Operasi Dengan Desimal

Algoritma Untuk Operasi Dengan Desimal

Algoritma untuk penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian desimal adalah sederhana, sama halnya dengan algoritma bilangan cacah.

Contoh 7.4

Tentukan hasil penjumlahan berikut

a. $3,56 + 7,95$

b. $0,0094 + 80,183$

Solusi

Kita akan menemukan hasil penjumlahan tersebut dengan menggunakan algoritma desimal

a. $3,56 + 7,95$

1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10^2}$
3	5	6
7	9	5
11	5	1

b. $0,0094 + 80,183$

10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10^2}$	$\frac{1}{10^3}$	$\frac{1}{10^4}$
		0	0	9	4
8	0	1	8	3	
8	0	1	9	2	4

Contoh 7.5

a. $14,793 - 8,95$

b. $7,56 - 0,0008$

Solusi: Kita dapat menggunakan pendekatan pecahan sebagaimana dapat kita lakukan pada operasi penjumlahan, akan tetapi algoritma pecahan biasanya lebih efisien

a. $14,793 - 8,95$

b. $7,56 - 0,0008$

$$\begin{array}{r} 14.793 \\ - 8.95 \\ \hline 5.843 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7.5600 \\ - 0.0008 \\ \hline 7.5592 \end{array}$$

PerkalianKalikan $437,09 \times 3,8$ **Solusi**

$$437,09 \times 3,8 = \frac{43709}{100} \times \frac{38}{10} = \frac{43709 \times 38}{100 \times 10} = \frac{1660942}{1000} = 1660,942$$

PembagianTentukan hasil bagi $154,63 \div 4,7$ **Solusi**

$$154,63 \div 4,7 = \frac{15463}{100} \div \frac{47}{10} = \frac{15463}{100} \div \frac{470}{100} = \frac{15463}{470} = 32,9$$

Pengklasifikasian Desimal BerulangNyatakan $\frac{7}{40}$ dalam bentuk desimal

Solusi

$$\begin{array}{r} 0.175 \\ 40 \overline{) 7.000} \\ \underline{-40} \\ 300 \\ \underline{-280} \\ 200 \\ \underline{-200} \\ 0 \end{array}$$

Sekarang coba nyatakan $\frac{1}{3}$ sebagai desimal. Jika kita menggunakan kalkulator maka akan diperoleh hasil $1 \div 3 = 0,333333333$. Dalam kalkulator, tampilan $1 \div 3 = 0,333333333$ seolah-olah menunjukkan bahwa $\frac{1}{3}$ merupakan desimal yang berhenti karena kalkulator hanya dapat menampilkan nilai tempat yang hingga. Akan tetapi jika kita menggunakan metode pembagian panjang maka akan memberikan pemahaman yang mendalam terkait dengan masalah ini.

$$\begin{array}{r} 0.333 \dots \\ 3 \overline{) 1.000} \\ \underline{-9} \\ 10 \\ \underline{-9} \\ 10 \\ \underline{-9} \\ 1 \end{array}$$

Dengan menggunakan pembagian panjang, kita dapat melihat bahwa desimal dalam hasil bagi tidak akan pernah berhenti, karena setiap sisanya adalah satu. Hal ini serupa dengan desimal untuk $\frac{1}{11}$ adalah 0,0909.... Masih berkaitan dengan tanda koma, suatu bar horizontal dapat ditempatkan di atas pengulangan, string pertama dari digit berulang. Sehingga,

$$\frac{1}{3} = 0,\overline{3},$$

$$\frac{2}{7} = 0,\overline{285714},$$

$$\frac{1}{11} = 0,\overline{09},$$

$$\frac{40}{99} = 0,\overline{40},$$

$$\frac{2}{9} = 0, \overline{2},$$

(Gunakan kalkulator Anda atau dengan menggunakan algoritma pembagian panjang untuk mengoreksi bahwa hasil tersebut benar). Desimal mempunyai pengulangan yang disebut desimal berulang. Jumlah digit dalam pengulangan disebut sebagai periode desimal. Sebagai contoh, periode dari $\frac{1}{11}$ adalah 2. Agar mendapatkan pemahaman yang mendalam mengenai desimal berulang, perhatikan contoh-contoh berikut.

Contoh 7.6

Nyatakan $\frac{6}{7}$ sebagai desimal

Solusi

$$\begin{array}{r} 0.857142 \\ 7 \overline{) 6.000000} \\ \underline{-56} \\ 40 \\ \underline{-35} \\ 50 \\ \underline{-49} \\ 10 \\ \underline{-7} \\ 30 \\ \underline{-28} \\ 20 \\ \underline{-14} \\ 6 \end{array}$$

Saat membagi dengan 7, ada tujuh kemungkinan sisa yaitu 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Jadi, ketika membagi dengan 7, 0 akan muncul sebagai sisa (desimal berakhir) atau salah satu sisa lainnya yang bukan nol akhirnya harus muncul kembali sebagai sisa. Pada saat itu, desimal akan mulai berulang. Perhatikan bahwa sisa 6 muncul untuk kedua kalinya, jadi desimal akan mulai berulang pada saat itu. Oleh karena itu $\frac{6}{7} = 0, \overline{857142}$. Hal ini serupa dengan $\frac{1}{13}$ akan mulai berulang tidak lebih dari yang ke 13, $\frac{7}{23}$ akan mulai berulang dengan sisa yang ke 23, dan sebagainya.

Dengan memperhatikan beberapa contoh, penyebut yang mempunyai faktor lebih dari 2 atau 5 akan memenuhi teorema berikut ini.

Teorema

Pecahan Berulang, Representasi Desimal Tidak Berhenti

Misalkan $\frac{a}{b}$ adalah pecahan sederhana. Maka $\frac{a}{b}$ mempunyai representasi desimal berulang yang tidak berhenti jika dan hanya jika b mempunyai suatu faktor prima selain 2 atau 5

Contoh 7.7

Nyatakan $0, \overline{34}$ dalam bentuk pecahan

Solusi

Misal $n = 0, \overline{34}$. Oleh karena $100n = 34, \overline{34}$

Maka $100n = 34,343434 \dots$

$$\begin{array}{r} n = \quad ,343434 \dots \\ \hline 99n = 34 \end{array}$$

$$\text{Atau} \quad n = \frac{34}{99}$$

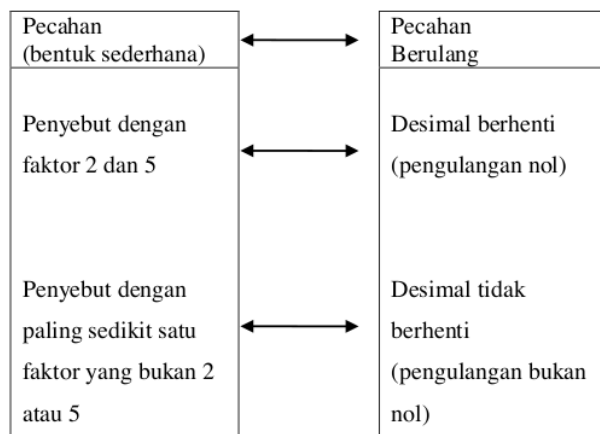
Prosedur ini dapat diaplikasikan untuk sebarang desimal berulang yang tidak berhenti, kecuali perkalian n dengan 100, Anda harus mengalikan n dengan 10^m , dimana m adalah banyaknya digit yang berulang. Sebagai contoh, untuk menyatakan $17, \overline{531}$ dalam bentuk pecahan, misal $n = 17, \overline{531}$, perkalian n dan $17, \overline{531}$ dengan 10^3 , karena pengulangan $\overline{531}$ mempunyai 3 digit. Maka $10^3n - n = 17.531, \overline{531} - 17, \overline{531} = 17514$. Dari sini kita temukan bahwa $n = \frac{17514}{999}$

Akhirnya, kita dapat menuju pada hasil penting berikut bahwa hubungan pecahan dan desimal berulang.

TEOREMA

Setiap pecahan mempunyai representasi desimal berulang, dan setiap desimal berulang mempunyai suatu representasi pecahan

Diagram berikut memberikan ringkasan secara visual dari teorema ini



RASIO DAN PROPORSI

RASIO

Konsep rasio banyak kita jumpai dalam kehidupan sehari-hari, sebagai contohnya dapat Anda lihat pada ilustrasi berikut ini.

Contoh 7.8

- Di Kampus Atmajaya, rasio dosen dan mahasiswa adalah 1:3
- Rasio dari siswa perempuan dan laki-laki di suatu kelas adalah 3:2
- Suatu campuran adonan semen dan pasir memiliki rasio 1:3
- Rasio sentimeter ke inchi adalah 2,54:1

Bilangan yang digunakan dalam rasio adalah bilangan cacah, pecahan, desimal yang merepresentasikan pecahan. Rasio mencakup bilangan real yang akan dipelajari pada bab 8.

Dalam bahasa Inggris, kata “per” artinya “untuk setiap” dan mengindikasikan suatu rasio. Sebagai contoh, rata-rata mili per galon, kilometer per jam (kecepatan), rupiah per jam (gaji).

DEFINISI

Rasio

Rasio adalah suatu pasangan bilangan yang terurut, ditulis $a:b$, dengan $b \neq 0$.

Tidak seperti pecahan, ada rasio dengan $b = 0$. Sebagai contoh rasio laki-laki dan perempuan pada tim *baseball* adalah 9:0. Akan tetapi dalam kebanyakan kasus, jarang kita temui $b = 0$

Rasio memperbolehkan kita membandingkan ukuran relatif dari dua kuantitas. Perbandingan ini dapat direpresentasikan dengan simbol rasio $a:b$ atau hasil bagi $\frac{a}{b}$. Hasil bagi terjadi secara natural ketika kita akan menginterpretasikan rasio.

Dalam contoh 7.8(a), $\frac{1}{3}$ melambangkan banyaknya dosen dibanding mahasiswa di Kampus Atmajaya. Pada contoh 7.8(b), $\frac{3}{2}$ merupakan perbandingan banyaknya siswa perempuan dan banyaknya siswa laki-laki. Kita juga dapat mengatakan bahwa $\frac{2}{3}$ merupakan perbandingan dari banyaknya siswa laki-laki dan perempuan, atau rasio dari laki-laki dan perempuan adalah 2:3.

Perhatikan bahwa ada beberapa rasio yang dapat dibentuk ketika membandingkan populasi dari laki-laki dan perempuan di suatu kelas seperti pada contoh 7.8(b), dimana 3:2 (perempuan terhadap laki-laki), 2:3 (laki-laki terhadap perempuan), 3:5 (perempuan terhadap jumlah siswa di suatu kelas), 2:5 (laki-laki terhadap jumlah siswa di suatu kelas). Beberapa rasio menyatakan perbandingan bagian terhadap bagian, sebagaimana pada contoh 7.8(c). Suatu campuran adonan semen dan pasir terdiri dari 1 unit semen dan 3 unit pasir. (Suatu unit dapat berbeda ukuran, bisa berupa kg, bak, dan sebagainya. Rasio dapat juga merepresentasikan perbandingan bagian terhadap keseluruhan atau keseluruhan terhadap bagian. Pada contoh 7.8(b), rasio perempuan (bagian) terhadap jumlah siswa di kelas (keseluruhan) adalah 3:5. Perhatikan bahwa rasio bagian terhadap keseluruhan 3:5 mempunyai konsep yang sama sebagaimana pecahan, dimana jumlah seluruh siswa di suatu kelas terhadap laki-laki, sebut saja $\frac{3}{5}$. Perbandingan dari jumlah seluruh siswa di kelas terhadap siswa laki-laki dapat dinyatakan sebagai rasio keseluruhan terhadap bagian yaitu 5:2 atau pecahan $\frac{5}{2}$.

Pada contoh 7.8(b), rasio perempuan terhadap laki-laki mengindikasikan hanya ukuran relatif dari populasi perempuan dan laki-laki di suatu kelas. Dari rasio tersebut ada beberapa kemungkinan jumlah siswa laki-laki dan perempuan yaitu 30 siswa perempuan dan 20 siswa laki-laki, 300 siswa perempuan dan 200

siswa laki-laki, atau beberapa pasangan bilangan lain yang rasionya ekuivalen. Hal ini penting untuk menjadi catatan bahwa rasio selalu merepresentasikan jumlah relatif yang sama. Perhatikan contoh berikut.

Contoh 7.9

Di kelas A rasio siswa perempuan dan laki-laki adalah 8:6. Di kelas B rasio siswa perempuan dan laki-laki adalah 4:3. Setiap kelas terdiri dari 28 siswa. Representasikan rasio ini dengan jumlah relatif yang sama.

Solusi Perhatikan bahwa kelas dapat dikelompokkan dalam cara-cara yang berbeda (Gambar 7.7)

Kelas 1: $\begin{array}{cc} \text{GGGG} & \text{GGGG} \\ \text{BBB} & \text{BBB} \end{array} \mid \begin{array}{cc} \text{GGGG} & \text{GGGG} \\ \text{BBB} & \text{BBB} \end{array}$ Rasio 8 : 6

Kelas 2: $\begin{array}{cc} \text{GGGG} & \text{GGGG} \\ \text{BBB} & \text{BBB} \end{array} \mid \begin{array}{cc} \text{GGGG} & \text{GGGG} \\ \text{BBB} & \text{BBB} \end{array}$ Rasio 4 : 3

Keterangan:

G: siswa perempuan

B: siswa laki-laki

Gambar 7.7

Pembagian yang ditunjukkan pada Gambar 7.7 tidak merubah jumlah relatif perempuan terhadap laki-laki dalam suatu kelompok. Kita lihat untuk kedua kelas ada 4 perempuan untuk setiap 3 laki-laki. Sehingga kita katakan bahwa pasangan tersebut, rasio 4:3 dan 8:6 ekuivalen, karena mereka merepresentasikan jumlah relatif yang sama. Mereka ekuivalen dengan rasio 16:12.

Dari contoh 7.9 seharusnya jelas bahwa rasio $a:b$ dan $ar:br$, dimana $r \neq 0$, merepresentasikan jumlah relatif yang sama. Gunakan suatu argumen yang serupa dengan pecahan, dimana kita dapat menunjukkan bahwa rasio $a:b$ dan $c:d$ merepresentasikan jumlah relatif yang sama jika dan hanya jika $ad = bc$. Oleh karena itu kita mempunyai definisi berikut.

DEFINISI

Kesamaan Rasio

Misalkan $\frac{a}{b}$ dan $\frac{c}{d}$ adalah sebarang dua pecahan, maka $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ jika dan hanya jika $ad = bc$

Hanya dengan pecahan, definisi ini dapat digunakan untuk menunjukkan bahwa jika n adalah bilangan bukan nol, maka $\frac{an}{bn} = \frac{a}{b}$ atau $an:bn = a:b$. Dalam persamaan $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, a dan d disebut **ekstrem**, karena a dan d adalah ekstrem dari persamaan $a:b = c:d$, sementara b dan c disebut **mean**. Sehingga menurut kesamaan rasio bahwa dua rasio sama jika dan hanya jika perkalian means sama dengan perkalian ekstrem.

PROPORSI

Konsep proporsi berguna dalam pemecahan masalah yang melibatkan rasio.

DEFINISI

Proporsi adalah suatu pernyataannya dimana dua rasio yang diberikan adalah sama.

Persamaan $\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$ adalah proporsi karena $\frac{10}{12} = \frac{5.2}{6.2} = \frac{5}{6}$. Demikian juga persamaan $\frac{14}{21} = \frac{22}{33}$ adalah sebuah contoh proporsi, karena $14.33 = 21.22$. Secara umum $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ adalah suatu proporsi jika dan hanya jika $ad = bc$. Contoh selanjutnya menunjukkan bahwa proporsi digunakan untuk menyelesaikan masalah sehari-hari.

Contoh 7.10

Sekolah Harapan Bangsa membagikan 3 kotak susu coklat untuk setiap 7 siswa. Jika ada 581 siswa di sekolah, berapa banyak kotak susu coklat yang seharusnya dibagikan.

Solusi

Susun proporsi menggunakan rasio dari kotak susu coklat terhadap siswa. Misal n adalah bilangan yang belum diketahui. Maka

$$\frac{3 \text{ (kotak)}}{7 \text{ (siswa)}} = \frac{n \text{ (kotak)}}{581 \text{ (siswa)}}$$

Menggunakan sifat perkalian silang dari rasio, sehingga

$$3 \times 581 = 7 \times n$$

$$\text{Sehingga } n = \frac{3 \times 581}{7} = 249$$

Dalam contoh 7.10, banyaknya kotak susu yang dibandingkan dengan banyaknya siswa. Rasio yang mencakup perbedaan satuan (kotak untuk siswa) disebut rata-

Pendidikan Matematika Sekolah Dasar

rata. Secara umum penggunaan rata-rata mencakup mil per galon, rupiah per ons, dan sebagainya.

Penyelesaian proporsi seperti pada contoh 7.10 merupakan hal penting untuk mengatur rasio dengan cara yang konsisten berdasarkan satuan yang dihubungkan dengan bilangan. Dalam solusi kita, rasio 3:7 dan $n:581$ merepresentasikan rasio kotak susu coklat untuk siswa di sekolah. Proporsi berikut dapat juga digunakan.

$$\frac{3(\text{kotak susu coklat dalam rasio})}{n(\text{kotak susu coklat di sekolah})} = \frac{7(\text{siswa dalam rasio})}{581(\text{siswa di sekolah})}$$

Dalam hal ini, pembilang menunjukkan rasio asli. (Perhatikan proporsi $\frac{3}{n} = \frac{581}{7}$ tidak tepat dalam merepresentasikan masalah, karena satuan pembilang dan penyebut tidak bersesuaian). Secara umum, proporsi berikut ini adalah ekuivalen (mempunyai solusi yang sama) karena hal ini dapat dijustifikasi dengan perkalian silang.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad \frac{c}{a} = \frac{d}{b}$$

Oleh karena itu ada beberapa kemungkinan proporsi yang tepat yang dapat dibangun ketika rasio sama.

Contoh 7.11

Suatu resep roti membutuhkan 1 cangkir campuran, 1 cangkir susu, 4 butir putih telur, dan 3 sendok teh minyak. Jika satu resep roti ini mencukupi untuk 6 orang, maka berapa banyak telur yang dibutuhkan untuk 15 orang?

Solusi Ketika menyelesaikan proporsi, ini berguna untuk membuat daftar berbagai macam bagian dari informasi sebagai berikut.

Tabel 8.1

	Resep Asli	Resep Baru
Jumlah telur	4	x
Banyaknya orang	6	15

Sehingga $\frac{4}{6} = \frac{x}{15}$. Proporsi ini dapat diselesaikan dalam dua cara

Tabel 8.2

Perkalian Silang	Rasio yang Ekuivalen
$\frac{4}{6} = \frac{x}{15}$	$\frac{4}{6} = \frac{x}{15}$
$4.15 = 6x$	$\frac{4}{6} = \frac{2.2}{2.3} = \frac{2}{3} = \frac{2.5}{3.5} = \frac{10}{15} = \frac{x}{15}$
$60 = 6x$	Sehingga $x = 10$
$10 = x$	

Perhatikan bahwa contoh 7.11 merepresentasikan masalah banyaknya telur dan orang, sehingga ada tiga proporsi lainnya yang ekuivalen yaitu:

$$\frac{4}{x} = \frac{6}{15} \quad \frac{x}{4} = \frac{15}{6} \quad \frac{6}{4} = \frac{15}{x}$$

Contoh 7.12

Jika skala dalam gambar, 0,5 cm merepresentasikan 35 mil

- Berapa mil ukuran sebenarnya jika ukuran pada gambar adalah 4 cm?
- Berapa sentimeter ukuran pada gambar, jika ukuran sebenarnya 420 mil?

Solusi

a

	Skala	Sebenarnya
Sentimeter	0,5	4
Mil	35	x

$$\frac{0,5}{35} = \frac{4}{x}. \text{ Sehingga kita peroleh } x = \frac{35 \cdot 4}{0,5} \text{ atau } x = 280$$

b

	Skala	Sebenarnya
Sentimeter	0,5	y
Mil	35	420

$$\frac{0,5}{35} = \frac{y}{420} \text{ atau } \frac{0,5 \times 420}{35} = y, \text{ sehingga } y = \frac{210}{35} = 6 \text{ cm}$$

PERSEN

Mengonversi Persen

Sama halnya seperti rasio, persen sering digunakan dalam kehidupan sehari-hari terlebih dalam bidang perdagangan.

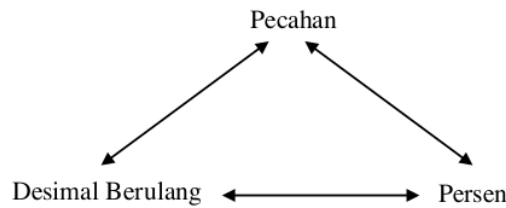
Contoh 7.13

- a Hasil panen padi di musim kemarau ini menurun sebesar 2%
- b Pada saat *weekend*, Mall Gajayana selalu memberikan diskon celana jeans hingga 30%.
- c Harga tanah di kota naik hingga 150% dari 5 tahun yang lalu
- d Hanya 30% mahasiswa pendidikan matematika angkatan 2017 di Kampus Atmajaya yang lulus ujian Kalkulus.
- e Menjelang Natal dan Tahun Baru, Royal Mall memberikan diskon pakaian hingga 50% + 20%

Dalam setiap kasus, persen mempresentasikan rasio, pecahan, atau desimal. Pada contoh 7.13(b), persen mempresentasikan pecahan. Misalkan, harga awal celana jeans adalah Rp 150.000,00 dan mendapatkan diskon sebesar Rp 45.000,00. Masalah ini dapat dilambangkan dengan pecahan $\frac{45.000}{150.000}$ sehingga diskon yang diberikan oleh Mall sebesar 0,3 atau 30%.

Dalam setiap kasus, persen merepresentasikan suatu rasio, pecahan, atau desimal. Kata persen berasal dari bahasa Latin yang artinya “per seratus”, sehingga 25% artinya 25 per seratus, $\frac{25}{100}$, atau 0,25. Simbol % digunakan untuk merepresentasikan persen. Sehingga 320% artinya 3,20 atau 320 per seratus. Secara umum $n\%$ merepresentasikan rasio $\frac{n}{100}$

Persen adalah representasi alternatif dari pecahan dan desimal, sehingga ini menjadi hal penting untuk mengubah/mengonversi diantara ketiga bentuk tersebut, seperti pada Gambar 7.8



Gambar 7.8

Pada bab ini kita juga akan mempelajari bagaimana mengonversi persen ke pecahan, persen ke desimal, desimal ke persen, dan pecahan ke persen.

Kasus 1: Persen ke Pecahan

Gunakan definisi persen. Sebagai contoh $57\% = \frac{57}{100}$

Kasus 2: Persen ke Desimal

Anda telah mempelajari bagaimana mengonversi pecahan ke desimal, sehingga kita dapat menggunakan keterampilan untuk mengonversi persen ke pecahan dan kemudian ke desimal. Sebagai contoh, $57\% = \frac{57}{100} = 0,57$ dan $33\% = \frac{33}{100} = 0,33$. Untuk mengonversi persen ke desimal “hilangkan simbol % dan geser tanda desimal hingga dua angka ke kiri. Oleh karenanya $23\% = 0,23$, $317\% = 3,17$, $0,5\% = 0,005$ dan sebagainya.

Kasus 3: Desimal ke Persen

Untuk mengubah desimal ke persen adalah sama saja yaitu kebalikan dari kasus 2. Sebagai contoh $0,53 = 53\%$, $4,5 = 450\%$, dan $0,0007 = 0,07\%$ dimana persen diperoleh dari desimal dengan “memindahkan tanda koma hingga dua angka ke kanan dan menulis simbol % di sebelah kanan.

Kasus 4: Pecahan ke Persen

Beberapa pecahan mempunyai desimal yang berhenti yang dapat dikonversi menjadi persen. Caranya adalah dengan menyatakan bentuk pecahan dengan penyebut 100. Sebagai contoh, $\frac{19}{100} = 19\%$, $\frac{3}{5} = \frac{60}{100} = 60\%$, $\frac{7}{25} = \frac{28}{100} = 28\%$ dan sebagainya.

LATIHAN

Untuk mengukur sejauh mana pemahaman Anda terhadap materi desimal pecahan, rasio, proporsi, dan persen, Coba Anda kerjakan latihan berikut.

1. Tuliskan setiap penjumlahan berikut dalam bentuk desimal
 - a $7(10) + 5 + 6\left(\frac{1}{10}\right) + 3\left(\frac{1}{1000}\right)$
 - b $6\left(\frac{1}{10}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{10}\right)^3$
 - c $3(10)^2 + 6 + 4\left(\frac{1}{10}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{10}\right)^3$
2. Susun bilangan berikut dari urutan yang terkecil hingga terbesar.
 - a 0,58; 0,085; 0,85
 - b 781,345; 781,354; 780,9999
 - c 4,9; 4,09; 4,99; 4,099
3. Urutkan masing-masing pecahan berikut dari yang terkecil hingga terbesar.
 1. $\frac{7}{8}, \frac{4}{5}, \frac{9}{10}$
 2. $\frac{27}{25}, \frac{43}{40}, \frac{539}{500}$
 3. $\frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{7}{9}$
4. Tentukan hasil perkalian berikut
 - a. $16,4 \times 2,8$ b. $0,065 \times 1,92$ c. $44,4 \div 0,3$
5. Nyatakan setiap desimal berulang berikut ini sebagai pecahan sederhana.
 - a. $0,\overline{16}$ b. $0,\overline{387}$ c. $0,\overline{725}$
6. Selesaikan setiap proporsi berikut ini dengan mencari nilai n
 - a. $\frac{n}{70} = \frac{6}{21}$ b. $\frac{n}{84} = \frac{3}{14}$ c. $\frac{12}{n} = \frac{18}{45}$
7. Tuliskan rasio berdasarkan setiap pernyataan berikut
 - a Du per lima kebun Toni ditanami tomat
 - b Ada lima kali banyak siswa laki-laki dibandingkan siswa perempuan di kelas IPA
 - c Sembilan dari 16 siswa mahasiswa Pendidikan Matematika adalah perempuan
8. Jika kamu berjalan 100 kilometer per jam, berapa kecepatannya dalam mph? (50 mph=80 kph atau kilometer per jam)

Pendidikan Matematika Sekolah Dasar

9. Jawablah soal berikut
- 24% dari 140
 - 21 adalah 17% dari ...
 - Tentukan $\frac{1}{2}\%$ dari 24,6
10. Suatu kelas senior terdiri dari 2780 siswa. Jika 70% dari siswa akan lulus, berapa banyak siswa yang akan lulus?

RANGKUMAN

1. Desimal digunakan untuk merepresentasikan pecahan. Jika bilangan 3457,968 diuraikan penulisannya, maka menjadi

$$3(1000) + 4(100) + 5(10) + 7(1) + 9\left(\frac{1}{10}\right) + 6\left(\frac{1}{100}\right) + 8\left(\frac{1}{1000}\right)$$

2. Cara mengurutkan desimal dapat menggunakan persegi ratusan, garis bilangan, dan membandingkannya dalam bentuk pecahan. Misal untuk mengurutkan 0,7 dan 0,23 dengan menggunakan pecahan. Pertama $0,7 = \frac{7}{10}$ dan $0,23 = \frac{23}{100}$. Sekarang perhatikan bahwa $\frac{7}{10} = \frac{70}{100}$ dan $\frac{70}{100} > \frac{23}{100}$ (karena $70 > 23$). Sehingga dapat disimpulkan $0,7 > 0,23$
3. Algoritma untuk penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian desimal adalah sederhana, sama halnya dengan algoritma bilangan cacah. Kita akan menemukan hasil penjumlahan tersebut dengan menggunakan algoritma desimal

a. $3,56 + 7,95$

1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10^2}$	
3	5	6	
7	9	5	95
14.793			
- 8.95			
5.843			

b. $0,0094 + 80,183$

10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10^2}$	$\frac{1}{10^3}$	$\frac{1}{10^4}$	
		0	0	9	4	
8	0	1	8	3		
80.183						
+ 0.0094						
80.1924						

7.5600

- 0.0008

7.5592

Perkalian

Contoh

$437,09 \times 3,8 =$

$$437,09 \times 3,8 = \frac{43709}{100} \times \frac{38}{10} = \frac{43709 \times 38}{100 \times 10} = \frac{1660942}{1000} = 1660,942$$

Pembagian

Contoh tentukan hasil bagi $154,63 \div 4,7 =$

$$154,63 \div 4,7 = \frac{15463}{100} \div \frac{47}{10} = \frac{15463}{100} \div \frac{470}{100} = \frac{15463}{470} = 32,9$$

4. Rasio adalah suatu pasangan bilangan yang terurut, ditulis $a:b$, dengan $b \neq 0$.
5. Misalkan $\frac{a}{b}$ dan $\frac{c}{d}$ adalah sebarang dua pecahan, maka $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ jika dan hanya jika $ad = bc$
6. Proporsi adalah suatu pernyataannya dimana dua rasio yang diberikan adalah sama.
7. Dalam setiap kasus, persen merepresentasikan suatu rasio, pecahan, atau desimal. Kata persen berasal dari bahasa Latin yang artinya “per seratus”, sehingga 25% artinya 25 per seratus, $\frac{25}{100}$, atau 0,25.

TES FORMATIF

Untuk memeriksa sejauh mana pemahaman Anda mengenai himpunan dan bilangan cacah, coba kerjakan masalah-masalah di bawah ini.

1. Seorang petani dapat membersihkan rumput pada $\frac{1}{2}$ hektar sawahnya selama 3 hari. Berapa lama waktu yang dibutuhkan petani tersebut untuk membersihkan rumput pada $2\frac{3}{4}$ hektar sawahnya?
2. Keluarga Pak Ahmad menghabiskan 5 galon air mineral setiap 3 minggu. Berapa rata-rata banyak galon air mineral yang akan mereka butuhkan untuk dalam waktu setahun?
3. Fitri menghabiskan botol deterjen cairan sebanyak 128 ons untuk satu minggu. Kira-kira berapa ons cairan deterjen cair yang mungkin dia beli dalam waktu setahun?

Pendidikan Matematika Sekolah Dasar

4. Pada Suatu Fakultas, $\frac{4}{7}$ dari mahasiswa adalah wanita, $\frac{4}{5}$ dari mahasiswa laki-laki sudah menikah, dan 9 mahasiswa laki-laki belum menikah. Berapakah jumlah mahasiswa di Fakultas tersebut.
5. Mataram Internasional *School* memiliki 1400 siswa. Rasio guru-murid adalah 1:35
 - a Berapa banyak tambahan guru yang harus dipekerjakan untuk mengurangi rasionya menjadi 1:20?
 - b Jika rasio guru dan murid tetap pada 1:35 dan jika biaya untuk satu guru adalah Rp 33.000.000,00 per tahun, berapa biaya yang akan digunakan per murid per tahun?
 - c Jawablah bagian (b) dengan perbandingan 1:20.
6. Ujian matematika memiliki 80 pertanyaan, masing-masing pertanyaan mempunyai skor sama. Wendi menjawab benar 55 pertanyaan. Tentukan berapa persen pertanyaan yang dijawab benar oleh Wendi
7. Sebuah toko menjual sebuah kulkas dengan diskon 15%. Bu Ana menerima kupon dari toko untuk tambahan diskon 20% dari setiap harga barang di toko pada saat itu. Jika Bu Ana menggunakan kupon tersebut untuk membeli kulkas, maka ia hanya membayar Rp2.720.000,00. Berapa harga awal kulkas tersebut sebelum didiskon?
8. Misalkan karyawan telah mogok kerja selama 22 hari kerja. Salah satu karyawannya, bernama Karin menghasilkan Rp 9.740.0000,00 per jam sebelum pemogokan. Di bawah kontrak lama, dia bekerja 240 jam untuk enam hari per tahun. Jika kontrak baru ini untuk jumlah hari yang sama setiap tahun, berapa kenaikan upah per jamnya yang harus diterima Karin untuk menebus upah yang dia lewatkan selama pemogokan dalam satu tahun?
9. Dokter jantung di Rumah Sakit Jakarta menawarkan diskon pada pasiennya agar mereka dapat menerapkan kebiasaan hidup sehat . Dia menawarkan diskon 10% jika pasien berhenti merokok dan 5% lagi jika pasien menurunkan tekanan darah atau kolesterolnya dalam persentase tertentu. Jika Anda memenuhi syarat di kedua kriteria tersebut, atau manakah yang akan Anda pilih untuk menghemat pengeluaran Anda. Pertama, menambahkan kedua diskon tersebut sehingga total diskon Anda 15%, atau aturan yang

Pendidikan Matematika Sekolah Dasar

kedua Anda mengambil diskon 10% terlebih dahulu kemudian mengambil 5% dari jumlah diskon yang dihasilkan? Jelaskan jawaban Anda.

10. Erik menyetor Rp 32.000.000,00 dalam rekening tabungan untuk masa depan pendidikan anak-anaknya. Bank membayar bunga sebesar 8% per tahun. Berapa besar jumlah tabungan Eric setelah 8 tahun?

BAB 8

BILANGAN BULAT

Tidak ada jejak yang membuktikan bahwa bilangan negatif ditemukan dalam tulisan orang Mesir, Babilonia, Hindu, Cina, atau Yunani. Meski begitu, perhitungan yang melibatkan pengurangan, seperti $(10 - 6)$, $(5 - 2)$ telah dilakukan dengan benar dimana peraturan untuk mengalikan negatif tetap diterapkan. Perkiraan waktu pengenalan bilangan negatif adalah sebagai berikut:

- 200 SM Akuntan Cina menggunakan batang hitam (negatif) untuk hutang dan batang merah (positif) untuk kredit..
- 300 M Pada abad ke-4 dalam teksnya *Arithmetica*, Diophantus berbicara tentang persamaan $4x + 20 = 4$ sebagaimana hal yang "tidak masuk akal," karena x harus -4 .
- 630 M Orang Hindu Brahmagupta berbicara tentang bilangan "negatif" dan positif".
- 1300 M Ahli matematika Cina Chu Shi-Ku memberi "aturan tanda" dalam teks aljabarnya.
- 1545 M Dalam teksnya *Ars Magna*, ahli matematika Italia Cardano mengenali akar negatif dan secara jelas menyatakan peraturan negatif.

Berbagai notasi telah digunakan untuk menunjukkan bilangan negatif. Orang-orang Hindu menempatkan sebuah titik atau lingkaran kecil di atas atau di samping sebuah angka untuk menunjukkan bahwa bilangan tersebut negatif; misalnya $\overset{\cdot}{6}$ yang merepresentasikan -6 . Dalam buku Chu Shih-Chieh tentang aljabar, *Precious Mirror of Four Elements*, diterbitkan pada tahun 1303, angka nol dan negatif mulai diperkenalkan.

Sekarang bilangan negatif penting dalam sistem akuntansi. Jika kamu mempunyai Rp 80.000,00 dan mengeluarkannya Rp100.000,00, maka Anda mempunyai hutang Rp 20.000,00. Orang juga akan menggunakan bilangan negatif untuk mengukur suhu, skor golf, dan perubahan harga saham.

Dalam matematika, himpunan bilangan bulat dihasilkan dari perluasan himpunan bilangan cacah untuk menciptakan solusi dalam setiap masalah

pengurangan bilangan cacah (misalnya, 6-10). Himpunan bilangan bulat mempertahankan banyak sifat dan pola operasi bilangan cacah.

Dalam hal ini, bilangan bulat negatif diperkenalkan sebelum pecahan dan desimal untuk menggambarkan lebih jelas hubungan antara kumpulan bilangan yang berbeda di sekolah dasar. Namun, dalam matematika sekolah dasar, sebagian besar pecahan dan topik desimal mendahului sebagian besar topik yang melibatkan bilangan negatif.

Kompetensi Dasar:

Kompetensi dasar dalam mempelajari materi bilangan bulat adalah mahasiswa mampu menerapkan konsep teori bilangan bulat dalam menyelesaikan masalah.

Indikator

- a Menjelaskan pengertian **bilangan bulat**
- b Menjelaskan **sifat-sifat penjumlahan bilangan bulat**
- c Menjelaskan sifat-sifat perkalian bilangan bulat
- d Menerapkan konsep bilangan dalam penyelesaian masalah

DEFINISI

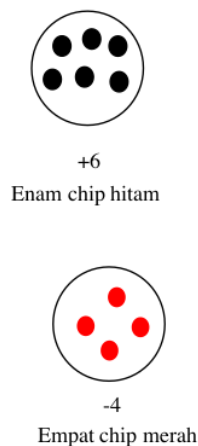
Bilangan Bulat

Himpunan bilangan bulat adalah himpunan

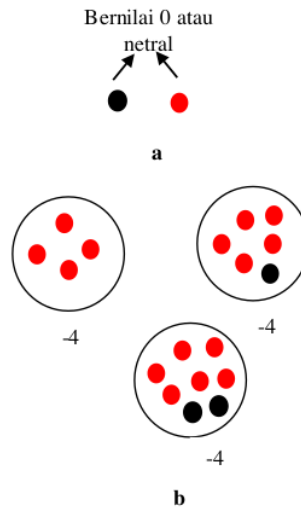
$$I = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Bilangan 1,2,3,... disebut bilangan bulat positif dan bilangan -1,-2,-3,... disebut bilangan bulat negatif. Nol adalah bilangan bulat bukan positif atau negatif.

Dalam suatu model himpunan, chip (kepingan) dapat digunakan untuk merepresentasikan bilangan bulat, akan tetapi dua warna chip harus digunakan. Misal warna hitam untuk merepresentasikan bilangan bulat positif dan warna merah untuk merepresentasikan bilangan bulat negatif. Satu chip hitam merepresentasikan positif satu dan satu chip merah merepresentasikan negatif satu. Dengan demikian satu chip hitam dan satu chip merah saling membatalkan, atau "membuat nol" sehingga mereka disebut pasangan nol (Gambar 8.2 a). Gunakan konsep ini dimana setiap bilangan bulat dapat direpresentasikan oleh chip dalam cara yang berbeda seperti pada Gambar 8.2 (b).



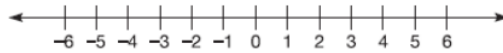
Gambar 8.1



Gambar 8.2

Penjabaran pada pada Gambar 8.2 (a) dan 8.2 (b) menunjukkan bahwa dengan menggunakan chip, setiap bilangan bulat memiliki banyak representasi. Cara lain

6
untuk mewakili bilangan bulat adalah dengan menggunakan model garis bilangan bulat (Gambar 8.3).



Gambar 8.3

6
Bilangan bulat berjarak sama dan tersusun secara simetris dari kiri dari kanan nol pada garis bilangan. Kesimetrian ini mengarah pada konsep yang berguna ketika dihubungkan dengan bilangan positif dan negatif. Kebalikan bilangan bulat a ditulis $-a$ atau $(-a)$.

Model Himpunan

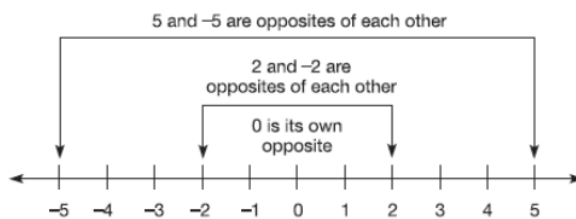
Lawan dari a adalah bilangan bulat yang direpresentasikan melalui jumlah chip yang sama, tetapi berbeda warna seperti pada Gambar 8.4



Gambar 8.4

Model Pengukuran

Lawan dari a merupakan bilangan bulat yang direpresentasikan melalui bayangan dari cermin 0 pada garis bilangan bulat (Gambar 8.5)



Gambar 8.5

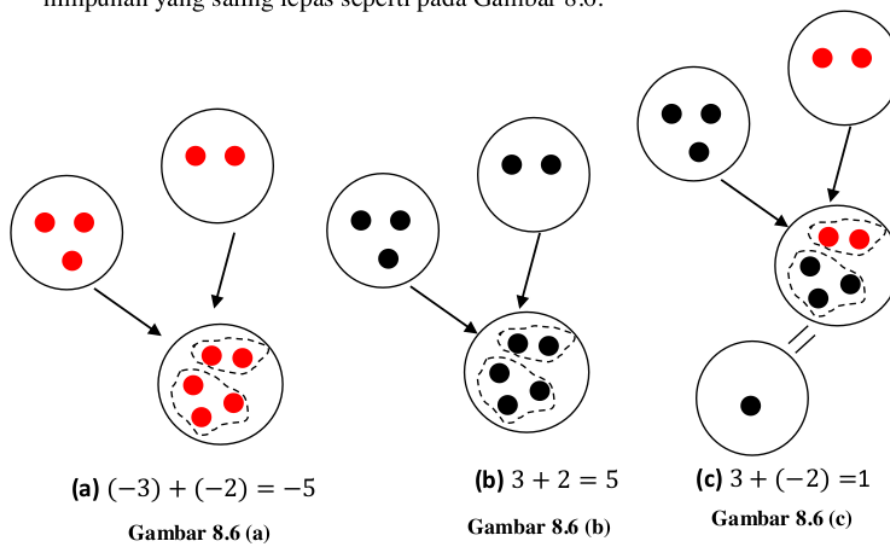
6
Lawan dari bilangan bulat positif adalah negatif dan lawan dari bilangan bulat negatif adalah positif, serta lawan dari nol adalah nol. Konsep lawan/kebalikan akan terlihat sangat bermanfaat ketika kita akan belajar pengurangan.

Penjumlahan dan Sifat-Sifatnya

Sebelum kita lebih jauh membahas mengenai bilangan bulat, coba perhatikan beberapa kasus berikut. Pertama, jika Anda berhutang Rp.300.000,00 dan Anda dikenai bunga sebesar Rp 5.0000,00, berapa total tagihan Anda? Kedua, jika seorang pemain sepak bola kehilangan 3 skor pada babak pertama dan kehilangan 2 skor di babak berikutnya, berapakah total keseluruhan skor yang mereka lewatkan? Pertanyaan ini adalah aplikasi dari $-3 + (-2)$.

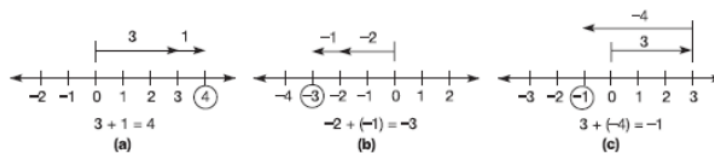
Model Himpunan

Penjumlahan artinya meletakkan bersama-sama atau menggabungkan dua himpunan yang saling lepas seperti pada Gambar 8.6.



Model Pengukuran

Penjumlahan berarti menempatkan panah terarah dari ujung ke ujung mulai pada nol. Perhatikan bahwa bilangan bulat positif ditunjukkan oleh panah yang menunjuk ke kanan dan bilangan bulat negatif dengan panah menunjuk ke kiri (Gambar 8.7).



Gambar 8.7

Contoh ⁵ pada Gambar 8.6 dan Gambar 8.7 mengarahkan kita pada definisi penjumlahan bilangan bulat.

DEFINISI

Penjumlahan Bilangan Bulat

Misal a dan b adalah sebarang bilangan bulat

1. **Penjumlahan nol:** $a + 0 = 0 + a = a$
2. **Penjumlahan dua bilangan positif:** ³ Jika a dan b adalah positif, kedua bilangan tersebut dijumlahkan sebagaimana bilangan cacah.
3. **Penjumlahan dua bilangan negatif:** Jika a dan b adalah positif (dimana $-a$ dan $-b$ adalah negatif), maka $(-a) + (-b) = -(a + b)$, dimana $a + b$ adalah jumlah bilangan cacah dari a dan b .
4. **Penjumlahan positif dengan negatif:**
 - a Jika a dan b adalah positif dan $a \geq b$, maka $a + (-b) = a - b$, dimana $a - b$ adalah selisih bilangan cacah dari a dan b
 - ³ b Jika a dan b adalah positif dan $a < b$, maka $a + (-b) = -(b - a)$, dimana $b - a$ adalah selisih bilangan cacah dari a dan b .

Aturan untuk penjumlahan ini sering dilakukan orang ketika mereka menjumlahkan bilangan bulat. Coba hitung soal-soal di bawah ini secara mental menggunakan bilangan cacah dan kemudian tentukan apakah jawabannya positif, negatif, atau nol.

Contoh 8.1

Hitunglah soal-soal berikut menggunakan definisi penjumlahan bilangan bulat.

- | | |
|------------------|---------------|
| a. $0 + 7$ | b. $2 + 5$ |
| c. $(-2) + (-6)$ | d. $6 + (-2)$ |
| e. $2 + (-6)$ | f. $4 + (-4)$ |

SOLUSI

- a Penjumlahan dengan nol: $0 + 7 = 7$
- b Penjumlahan dua bilangan positif: $2 + 5 = 7$
- c Penjumlahan dua bilangan negatif: $(-2) + (-6) = -(2 + 6) = -8$
- d Penjumlahan bilangan positif dengan negatif: $6 + (-2) = 6 - 2 = 4$

- e Penjumlahan bilangan positif dengan negatif: $2 + (-6) = -(6 - 2) = -4$
- f Penjumlahan suatu bilangan dan sifat-sifatnya: $4 + (-4) = 0$

Masalah dalam contoh 8.1 mempunyai interpretasi dalam kehidupan sehari-hari. Sebagai contoh, $(-2) + (-6)$ dapat dipandang sebagai suhu turun 2 derajat, kemudian satu jam berikutnya turun 6 derajat sehingga total suhu mengalami penurunan 8 derajat. Dalam sepak bola, $6 + (-2)$ dapat dianggap bahwa tim pemain sepak bola di babak pertama mendapat skor 6 dan kehilangan 2 skor di babak kedua, sehingga total skor yang diperoleh adalah 4.

Model-model dan aturan penjumlahan bilangan bulat yang telah dijelaskan sebelumnya, akan mengarahkan kita pada sifat-sifat bilangan bulat sebagai berikut.

Sifat-Sifat Penjumlahan Bilangan Bulat

Misal a , b , dan c adalah sebarang bilangan bulat

1. Sifat Tertutup Untuk Penjumlahan Bilangan Bulat

$a + b$ adalah bilangan bulat

2. Sifat Komutatif Untuk Penjumlahan Bilangan Bulat

$$a + b = b + a$$

3. Sifat Asosiatif Untuk Penjumlahan Bilangan Bulat

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

4. ⁶ Sifat Identitas Untuk Penjumlahan Bilangan Bulat

0 adalah bilangan bulat yang unik atau tunggal sedemikian sehingga $a + 0 = a = 0 + a$ untuk setiap a

5. ⁶ Sifat Invers Penjumlahan Untuk Penjumlahan Bilangan Bulat

Untuk setiap bilangan bulat a ada bilangan bulat yang unik atau tunggal, ditulis $-a$ sedemikian sehingga $a + (-a) = 0$. Bilangan bulat $-a$ disebut invers penjumlahan dari a .

Dengan kata lain, sifat ini menyatakan bahwa sebarang bilangan ditambah invers penjumlahannya maka hasilnya adalah nol. Berdasarkan sifat ini, maka muncullah teorema sebagai berikut.

TEOREMA

Misal a, b , dan c adalah sebarang bilangan bulat, jika $a + c = b + c$ maka $a = b$

TEOREMA

Misal a adalah sebarang bilangan bulat, maka $-(-a) = a$

PENGURANGAN

Pengurangan bilangan bulat dapat dipandang dalam beberapa cara.

A. POLA

Kolom pertama tetap 4 dan kolom ke dua barisannya selalu menurun satu	$4 - 2 = 2$		Bertambah 1
	$4 - 1 = 3$		Bertambah 1
	$4 - 0 = 4$		Bertambah 1
	$4 - (-1) = 5$		Bertambah 1
	$4 - (-2) = 6$		Bertambah 1

B. TAKE AWAY**CONTOH 8.2**

Hitung selisihnya

a $7 - 4$

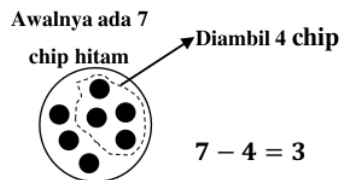
b $-3 - (-1)$

c $-2 - (-3)$

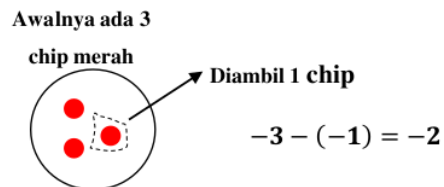
d $3 - 5$

SOLUSI

a $7 - 4$



b. $-3 - (-1)$



c. $-2 - (-3)$

Awalnya ada 2

chip merah



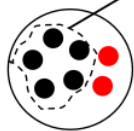
$-2 - (-3) = 1$

Karena awalnya ada 2 chip merah dan akan diambil 3 chip merah, maka kita perlu menambahkan 1 chip merah lagi (agar bisa dikurangi 3). Tapi ingat aturannya, jika kita tambah 1 chip merah maka kita harus menambahkan 1 chip hitam begitu sebaliknya, agar netral

d. $3 - 5$

Awalnya ada 3

chip hitam



$3 - 5 = -2$

Karena awalnya ada 3 chip hitam dan akan diambil 5 chip hitam, maka kita perlu menambahkan 2 chip hitam lagi (agar bisa dikurangi 5). Tapi ingat aturannya, jika kita tambah 2 chip hitam maka kita harus menambahkan 2 chip merah agar netral

Pengurangan Bilangan Bulat

DEFINISI

Pengurangan Bilangan Bulat artinya menjumlahkan lawannya

Misal a dan b adalah sebarang bilangan bulat, maka

$$a - b = a + (-b)$$

Contoh 8.3

Tentukan hasil pengurangan berikut dengan cara menjumlahkan dengan lawannya

a. $(-6) - 4$

b. $7 - (-5)$

SOLUSI

a. $(-6) - 4 = (-6) + (-4) = -10$

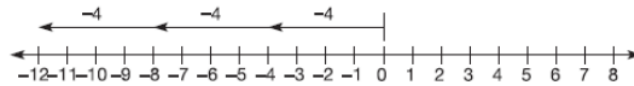
b. $7 - (-5) = 7 + 5 = 12$

PERKALIAN, PEMBAGIAN, DAN PENGURUTAN

Perkalian bilangan bulat dapat dipandang sebagai perluasan perkalian bilangan cacah. Ingat kembali model yang pertama untuk perkalian bilangan cacah dapat dipandang sebagai penjumlahan berulang seperti yang diilustrasikan berikut.

$$3 \times 4 = 4 + 4 + 4 = 12$$

Suatu cara yang mudah untuk memikirkan situasi $3 \times -4 = -4 + -4 + -4 = -12$. Perkalian $3 \times -4 = -4 + -4 + -4 = -12$ juga dapat dimodelkan melalui garis bilangan seperti pada Gambar 8.8



Gambar 8.8

Aturan perkalian bilangan bulat dapat dilakukan dengan menggunakan pola berikut ini.

Pola Pertama

$3 \times 4 = 4 + 4 + 4 = 12$		Berkurang 3
$3 \times 3 = 3 + 3 + 3 = 9$		Berkurang 3
$3 \times 2 = 2 + 2 + 2 = 6$		Berkurang 3
$3 \times 1 = 3$		Berkurang 3
$3 \times 0 = 0$		
$3 \times (-1) = ?$		
$3 \times (-2) = ?$		
$3 \times (-3) = ?$		

Jika kita perhatikan pola pertama, maka pola pertama selalu berkurang tiga sehingga mengarahkan pada kita bahwa $3 \times (-1) = -3$, $3 \times (-2) = -6$, $3 \times (-3) = -9$, demikian seterusnya. Pola yang sama juga mengarahkan kita bahwa perkalian dari dua bilangan bulat negatif adalah bilangan bulat positif.

Pola Kedua

$3 \times (-3) = (-3) + (-3) + (-3) = -9$		Bertambah 3
$2 \times (-3) = (-3) + (-3) = -6$		Bertambah 3
$1 \times (-3) = -3$		Bertambah 3
$0 \times (-3) = 0$		

$$-1 \times (-3) = ?$$

$$-2 \times (-3) = ?$$

$$-3 \times (-3) = ?$$



Jika kita perhatikan pola kedua, maka pola kedua selalu bertambah tiga sehingga mengarahkan pada kita bahwa $-1 \times (-3) = 3$, $-2 \times (-3) = 6$, $-3 \times (-3) = 9$ demikian seterusnya.

Model garis bilangan, pola, dan cip berwarna mengarahkan kita pada definisi perkalian bilangan bulat yang akan dijelaskan berikut ini.

DEFINISI

Perkalian Bilangan Bulat

Misal a dan b adalah sebarang bilangan bulat

1. Perkalian dengan 0

$$a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$$

2. Perkalian dua bilangan positif

Jika a dan b adalah positif, kedua bilangan tersebut dikalikan sebagaimana bilangan cacah

3. Perkalian bilangan positif dan negatif

Jika a adalah positif dan b adalah positif (sehingga $-b$ adalah negatif), maka

$$a(-b) = -(ab)$$

dimana ab adalah perkalian bilangan cacah dari a dan b . Oleh karena itu perkalian bilangan positif dengan negatif adalah negatif.

4. Perkalian dua bilangan negatif

Jika a dan b adalah bilangan positif, maka

$$(-a)(-b) = ab,$$

dimana ab adalah hasil perkalian bilangan cacah a dan b . Oleh karena itu hasil perkalian dari dua bilangan negatif adalah positif.

Definisi dari perkalian bilangan bulat dapat digunakan untuk membenarkan sifat-sifat dari perkalian bilangan bulat.

Sifat-Sifat Perkalian Bilangan Bulat

Misal a , b , dan c adalah sebarang bilangan bulat

1. Sifat tertutup untuk perkalian bilangan bulat

ab adalah bilangan bulat

2. Sifat komutatif untuk perkalian bilangan bulat

$$ab = ba$$

3. Sifat asosiatif untuk perkalian bilangan bulat

$$(ab)c = a(bc)$$

4. Sifat identitas untuk perkalian bilangan bulat

1 adalah bilangan bulat yang unik atau tunggal sedemikian sehingga

$$a \cdot 1 = a = 1 \cdot a \text{ untuk setiap } a$$

5. Sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan bilangan bulat

$$a(b + c) = ab + ac$$

PEMBAGIAN

Definisi Pembagian Bilangan Bulat

Misal a dan b adalah sebarang bilangan bulat, dimana $b \neq 0$. Maka $a \div b = c$ jika dan hanya jika $a = b \cdot c$ untuk suatu bilangan bulat unik c .

Berikut juga akan dijelaskan mengenai sifat-sifat pembagian bilangan bulat. Asumsikan bahwa b membagi a , sehingga dapat disimpulkan bahwa b adalah faktor dari a .

1. Pembagian oleh 1

$$a \div 1 = a$$

2. Pembagian dua bilangan positif atau negatif. Jika a dan b keduanya adalah positif (atau keduanya adalah negatif), maka $a \div b$ adalah positif.

3. Pembagian suatu bilangan positif dan negatif. Jika salah satu dari a atau b adalah positif dan yang lainnya adalah negatif, maka $a \div b$ adalah negatif.

4. Pembagian nol dengan bilangan bulat bukan nol

$0 \div b = 0$, dimana $b \neq 0$, karena $0 = b \cdot 0$. Sebagaimana bilangan cacah, pembagian oleh nol tidak terdefinisi untuk bilangan bulat.

EKSPONEN NEGATIF

Ketika kita belajar bilangan cacah, materi eksponen diajarkan setelah materi perkalian. Melalui pola, kita dapat memperluas definisi eksponen yang mencakup eksponen bilangan bulat.

$$\begin{array}{l} a^3 = a \cdot a \cdot a \\ a^2 = a \cdot a \\ a^1 = a \\ a^0 = 1 \\ a^{-1} = \frac{1}{a} \\ a^{-2} = \frac{1}{a^2} \\ a^{-3} = \frac{1}{a^3} \end{array} \begin{array}{c} \div a \\ \div a \\ \div a \\ \div a \\ \div a \\ \div a \end{array}$$

.

.

.

Dst

Pola ini mengarahkan kita pada definisi berikut

DEFINISI

Eksponen Bilangan Bulat Negatif

Misal a adalah sebarang bilangan bukan nol dan n adalah bilangan bulat positif.

Maka

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Sebagai contoh, $7^{-3} = \frac{1}{7^3}$, $2^{-5} = \frac{1}{2^5}$, dan juga $\frac{1}{4^{-3}} = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = 4^3$

Teorema-teorema pada eksponen bilangan cacah pada bab 3 dapat digeneralisasi pada eksponen bilangan bulat. Oleh karena itu, untuk sebarang bilangan bukan nol yaitu a dan b , dan bilangan bulat m dan n berlaku

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m \cdot b^m = (ab)^m$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

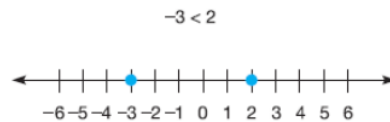
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

PENGURUTAN BILANGAN BULAT

Konsep kurang dari dan lebih dari pada bilangan bulat merupakan hasil pengembangan dari pengurutan bilangan cacah. Pengurutan dipandang dalam dua cara, yaitu menggunakan pendekatan garis bilangan dan pendekatan penjumlahan.

Pendekatan Garis Bilangan

Bilangan bulat a kurang dari bilangan bulat b , ditulis $a < b$, jika a di sebelah kiri b pada garis bilangan bulat. Oleh karena itu, dengan memandang garis bilangan, seseorang dapat melihat bahwa $-3 < 2$ (Gambar 8.9). Demikian juga untuk $-4 < -1$, $-2 < 3$, dan sebagainya.



Gambar 8.9

Pendekatan Penjumlahan

Bilangan bulat a kurang dari bilangan bulat b , ditulis $a < b$, jika dan hanya jika ada suatu bilangan bulat positif p sedemikian sehingga $a + p = b$. Oleh karena $-6 < -2$, karena $-6 + 4 = -2$ dan $-9 < 3$, karena $-9 + 12 = 3$. Secara ekuivalen, $a < b$ jika dan hanya jika $b - a$ adalah positif. Sebagai contoh $-20 < -12$, karena $-12 - (-20) = 8$, dimana 8 adalah bilangan bulat positif.

Bilangan bulat a lebih besar dari bilangan bulat b , ditulis $a > b$ jika dan hanya jika $b < a$. Oleh karenanya diskusi lebih dari, analogi dengan kurang dari. Definisi yang sama dapat dibuat untuk $\leq$ atau $\geq$

Contoh 8.4

Urutkan bilangan bulat berikut dari yang terkecil hingga terbesar menggunakan pendekatan garis bilangan.

2, 11, -7, 0, 5, -8, -13

Solusi

Lihat Gambar 8.10



Gambar 8.10

$$-13 < -8 < -7 < 0 < 2 < 5 < 11$$

Contoh 8.5

Tentukan bilangan bulat terkecil dalam himpunan $\{2, 0, -7, 10, -9\}$ menggunakan pendekatan penjumlahan.

Solusi

$-9 < -7$, karena $(-9) + 2 = -7$. Selanjutnya karena sebarang bilangan bulat negatif adalah kurang dari 0, -8 pasti yang paling kecil.

Sifat-sifat berikut melibatkan pengurutan, penjumlahan, dan perkalian yang serupa dengan bilangan cacah.

Sifat-Sifat Pengurutan Bilangan Bulat

Misal a, b , dan c adalah sebarang bilangan bulat, p adalah suatu bilangan bulat positif, dan n adalah suatu bilangan bulat negatif.

1. Sifat Transitif Untuk Kurang Dari

Jika $a < b$ dan $b < c$, maka $a < c$

2. Sifat Kurang dari Terhadap Penjumlahan

Jika $a < b$ maka $a + c < b + c$

3. Sifat Kurang Dari Terhadap Perkalian Positif

Jika $a < b$ maka $ap < bp$

4. Sifat Kurang Dari dan Perkalian Negatif

Jika $a < b$ maka $an > bn$

LATIHAN

Untuk mengukur sejauh mana pemahaman Anda terhadap materi bilangan bulat, coba Anda kerjakan latihan berikut.

1. Dari beberapa bilangan berikut, mana yang termasuk bilangan bulat?

a. $\frac{3}{4}$

b. 520

c. $-\frac{252}{5}$

Pendidikan Matematika Sekolah Dasar

2. Tentukan hasil penjumlahan berikut

a. $4 + (-7)$ b. $(-3) + (-5)$ c. $-7 - (-8)$

3. Untuk setiap persamaan berikut, tentukan bilangan bulat yang memenuhi persamaan

a. $x + (-3) = -10$

b. $x + 5 = -8$

c. $6 + (-x) = -3$

4. Tentukan hasil kali berikut

a. $(-2) \times (-5) \times (-3)$

b. $-(-3) \times (-5)$

c. $5[(-2)(13) + 5(-4)]$

5. Tunjukkan bahwa setiap pernyataan berikut benar dengan menggunakan pendekatan garis bilangan

a. $-3 < 2$

b. $-6 < -2$

c. $-3 > -12$

6. Gunakan definisi dari eksponen bilangan bulat dan sifat-sifatnya untuk menentukan hasil dari ekspresi berikut

a. $3^2 \cdot 3^5$

b. $\frac{6^{-3}}{6^{-4}}$

c. $(3^{-4})^2$

7. Terapkan sifat-sifat eksponen untuk mengekspresikan nilai-nilai berikut dalam bentuk yang sederhana.

$$\frac{5^{-2} \cdot 5^3}{5^{-4}}$$

$$\frac{(3^{-2})^{-5}}{3^{-6}}$$

$$\frac{2^6 \cdot 3^2}{(3^{-2})^{-2} \cdot 4^5}$$

8. Tuliskan setiap barisan bilangan bulat berikut dalam urutan yang terkecil hingga terbesar

a. $-5, 5, 2, -2, 0$

- b $12, -6, -8, 3, -5$
c $23, -36, 45, -72, -108$
9. Sisipkan simbol $<, =$, atau $>$ untuk menghasilkan pernyataan yang benar
- a $3 + (-5) \underline{\hspace{1cm}} 2 \times (-3)$
b $(-12) \div (-2) \underline{\hspace{1cm}} -2 - (-3)$
c $5 + (-5) \underline{\hspace{1cm}} (-3) \times (-6)$
10. Lengkapi pernyataan berikut dengan menyisipkan tanda $<, =$, atau $>$ sehingga menghasilkan pernyataan yang benar
- a Jika $x < 4$ maka $x + 2 \underline{\hspace{1cm}} 6$
b Jika $x > -2$ maka $x - 6 \underline{\hspace{1cm}} -8$

RANGKUMAN

1. Himpunan bilangan bulat adalah himpunan
 $I = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
Bilangan $1, 2, 3, \dots$ disebut bilangan bulat positif dan bilangan $-1, -2, -3, \dots$ disebut bilangan bulat negatif. Nol adalah bilangan bulat bukan positif atau negatif.
2. Sifat-Sifat Penjumlahan Bilangan Bulat
- Misal a, b , dan c adalah sebarang bilangan bulat
- a Sifat Tertutup Untuk Penjumlahan Bilangan Bulat
 $a + b$ adalah bilangan bulat
- b Sifat Komutatif Untuk Penjumlahan Bilangan Bulat
$$a + b = b + a$$
- c Sifat Asosiatif Untuk Penjumlahan Bilangan Bulat
$$(a + b) + c = a + (b + c)$$
- d Sifat Identitas Untuk Penjumlahan Bilangan Bulat
0 adalah bilangan bulat yang unik atau tunggal sedemikian sehingga $a + 0 = a = 0 + a$ untuk setiap a
- e Sifat Invers Penjumlahan Untuk Penjumlahan Bilangan Bulat
Untuk setiap bilangan bulat a ada bilangan bulat yang unik atau tunggal, ditulis $-a$ sedemikian sehingga $a + (-a) = 0$. Bilangan bulat $-a$ disebut invers penjumlahan dari a .

Pendidikan Matematika Sekolah Dasar

3. Misal a, b , dan c adalah sebarang bilangan bulat, jika $a + c = b + c$ maka $a = b$
4. Misal a adalah sebarang bilangan bulat, maka $-(-a) = a$
5. Pengurangan Bilangan Bulat artinya menjumlahkan lawannya
Misal a dan b adalah sebarang bilangan bulat, maka
$$a - b = a + (-b)$$
6. Sifat-Sifat Perkalian Bilangan Bulat
Misal a, b , dan c adalah sebarang bilangan bulat
- a Sifat tertutup untuk perkalian bilangan bulat
 ab adalah bilangan bulat
- b Sifat komutatif untuk perkalian bilangan bulat
 $ab = ba$
- c Sifat asosiatif untuk perkalian bilangan bulat
 $(ab)c = a(bc)$
- d Sifat identitas untuk perkalian bilangan bulat
1 adalah bilangan bulat yang unik atau tunggal sedemikian sehingga
 $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$ untuk setiap a
- e Sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan bilangan bulat
 $a(b + c) = ab + ac$
7. Definisi Pembagian Bilangan Bulat
Misal a dan b adalah sebarang bilangan bulat, dimana $b \neq 0$. Maka $a \div b = c$ jika dan hanya jika $a = b \cdot c$ untuk suatu bilangan bulat unik c .
8. Sifat-Sifat pembagian Bilangan Bulat
- a Pembagian oleh 1
- b $a \div 1 = a$
- c Pembagian dua bilangan positif atau negatif. Jika a dan b keduanya adalah positif (atau keduanya adalah negatif), maka $a \div b$ adalah positif.
- d Pembagian suatu bilangan positif dan negatif. Jika salah satu dari a atau b adalah positif dan yang lainnya adalah negatif, maka $a \div b$ adalah negatif.
- e Pembagian nol dengan bilangan bulat bukan nol
- f $0 \div b = 0$, dimana $b \neq 0$, karena $0 = b \cdot 0$. Sebagaimana bilangan cacah, pembagian oleh nol tidak terdefinisi untuk bilangan bulat.

9. Misal a adalah sebarang bilangan bukan nol dan n adalah bilangan bulat positif. Maka

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

10. Untuk sebarang bilangan bukan nol yaitu a dan b , dan bilangan bulat m dan n berlaku

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

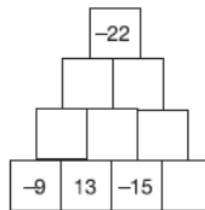
$$a^m \cdot b^m = (ab)^m$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

TES FORMATIF

Untuk mengukur sejauh mana pemahaman Anda terhadap materi bilangan bulat, coba Anda kerjakan tes berikut.

1. Isilah persegi yang kosong, sehingga bilangan dalam persegi merupakan jumlah sepasang bilangan yang terdapat pada persegi di bawahnya.



2. a. Dari beberapa bilangan bulat $-6, -10, -8, -7$, manakah yang ketika disubstitusikan ke x memenuhi pertidaksamaan berikut ini?

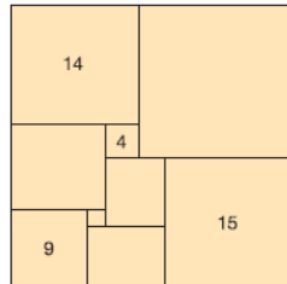
$$3x + 5 < -16$$

- b. Apakah ada bilangan bulat terbesar x yang membuat pertidaksamaan pada poin 2 (a) benar?
- c. Apakah ada bilangan bulat terkecil x yang membuat pertidaksamaan benar?
3. Pada saat ujian matematika, Adzkiya akan mendapatkan skor 4 untuk setiap soal yang dijawab secara benar, dia akan kehilangan 2 skornya untuk setiap soal yang dijawab salah, dan dia akan mendapatkan skor 0 untuk setiap soal

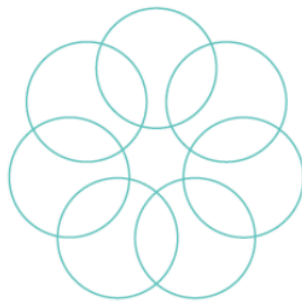
Pendidikan Matematika Sekolah Dasar

yang tidak dijawab. Ada 25 pertanyaan dalam ujian tersebut, dan Agus mendapatkan skor akhir 70.

- a. Berapakah jumlah soal terbanyak yang berhasil Adzkiya jawab dengan benar?
 - b. Berapakah jumlah soal terkecil yang berhasil Adzkiya jawab dengan benar?
 - c. Berapakah jumlah soal terbanyak yang tidak dijawab Adzkiya?
4. Jika $30 \leq a \leq 60$ dan $-60 \leq b \leq -30$ dimana a dan b adalah bilangan bulat, tentukan bilangan bulat terbesar dan terkecil yang memungkinkan untuk ekspresi berikut ini.
- a. $a + b$ b. $a - b$ c. ab d. $a \div b$
5. Tentukan semua nilai a dan b sehingga $a - b = b - a$
6. *Squared rectangle* adalah persegi panjang yang interiornya dapat dibagi menjadi dua atau lebih persegi. Salah satu contoh dari squared rectangle adalah berikut ini. Bilangan yang ditulis dalam persegi adalah panjang dari suatu sisi persegi. Tentukan ukuran persegi yang tidak berlabel.



7. Tempatkan bilangan-bilangan $-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, 7 pada setiap daerah di dalam 7 lingkaran berikut sehingga jumlah dari ketiga bilangan dalam setiap lingkaran adalah 0.



8. Jumlah dari dua bilangan bulat adalah 4 dan selisih ⁸ dari dua bilangan bulat adalah 10. Bilangan bulat yang dimaksud adalah.
9. Dalam satu minggu, suhu harian di sebuah kota (dalam C) adalah -18, -13, 5, 2, -10, -8, dan -7. Berapakah suhu rata-rata minggu ini?
10. Lengkapi persegi magik penjumlahan dengan menggunakan bilangan bulat 9, -12, 3, -6, 6, -3, 12, -9

	0	

DAFTAR PUSTAKA

- Billstein, R., Libeskind, S., & Lott, J.W. 2010. *A Problem Solving Approach to Mathematics for Elementary School Teachers*. Boston: Addison Wesley.
- Cockburn, A. D & Littler, G. 2008. *Mathematical Misconceptions. A Guide for Primary Teachers*. London: Sage.
- Eves, H. 1990. *An Introduction to The History Of Mathematics*. United States of America: Saunders College Publishing.
- Hatfield, M.M., Edwards, N.T., Bitter, G.G., & Morrow, J. 2005. *Mathematics Methods for Elementary and Middle School Teachers*. Hoboken NJ: John Wiley & Sons.
- Kenedy, L.M., Tipps, S., Johnson, A. 2008. *Guiding Children's Learning Of Mathematics, Eleventh Edition*. Belmont: Thomson Wadsworth
- Muhsetyo, G. 2014. *Menghayati Kekayaan dan Keindahan Matematika*. Malang: Universitas Negeri Malang.
- Muhsetyo, G. 2007. *Pembelajaran Matematika SD*. Jakarta: Universitas Terbuka.
- Musser, G.L, Burger, W.F, & Peterson, B.E. 2011. *Mathematics For Elementary Teachers: A Contemporary Approach, Ninth Edition*. United State of America: John Wiley & Sons, Inc
- Sonnabend, T. 2010. *Mathematics For Teachers: An Interactive Approach for Grades K-8*. United State of America: Brooks/Cole
- Sugate, J., Davis, A., Goulding, M. 2010. *Mathematical Knowledge for Primary Teachers: Fourth Edition*. New York: Routledge.
- Van De Walle, J.A. 1990. *Elementary School Mathematics Teaching Developmentally*. New York: Longman.

ORIGINALITY REPORT

8%

SIMILARITY INDEX

9%

INTERNET SOURCES

1%

PUBLICATIONS

2%

STUDENT PAPERS

PRIMARY SOURCES

1

repository.unikama.ac.id

Internet Source

2%

2

pelajaransekolahkita.blogspot.com

Internet Source

2%

3

repository.usu.ac.id

Internet Source

1%

4

repositori.kemdikbud.go.id

Internet Source

1%

5

dendyramadhani60.blogspot.com

Internet Source

1%

6

repository.usd.ac.id

Internet Source

1%

7

file.upi.edu

Internet Source

1%

8

qdoc.tips

Internet Source

1%

9

eprints.uny.ac.id

Internet Source

1%

Exclude quotes Off

Exclude matches < 1%

Exclude bibliography On